Теорема 7(теорема Миллера). *Существует такое вещественное число $\alpha > 1$, что если*

$$\alpha = \alpha_0,\ 2^{\alpha_0} = \alpha_1, \ldots, 2^{\alpha_n} = \alpha_{n+1}, \ldots,$$

то $[\alpha_n]$ — простое число при всех $n \geq 1$. Другими словами, существует вещественное число $\alpha > 1$ такое, что при всех $n \geq 1$ натуральные числа

$$p_n = \left[2^{2^{\cdot^{\cdot^{\alpha}}}}\right]$$

являются простыми числами при всех $n \geq 1$.

Доказательство теоремы 7 опирается на знаменитую теорему П. Л. Чебышёва, известную так же как "постулат Бертрана" (см., например, [18]): для любого $x > 1$ существует простое число p такое, что $x < p < 2x$.

Построим последовательность $p_n = [\alpha_n]$ по индукции. Положим $p_1 = 3$. По теореме П. Л. Чебышёва существует простое число p_{n+1}, удовлетворяющее условиям

$$2^{p_n} < p_{n+1} < p_{n+1} + 1 \leq 2^{p_n+1}.$$

Если $p_{n+1} + 1 = 2^{p_n+1}$, то $p_{n+1} = 2^{p_n+1} - 1$ не может быть простым, так как оно имеет делитель $2^{\frac{1}{2}(p_n+1)} - 1$. Следовательно,

$$2^{p_n} < p_{n+1} < p_{n+1} + 1 < 2^{p_n+1}.$$

Положим

$$u_n = \underbrace{\log_2 \ldots \log_2}_{n} p_n,\ v_n = \underbrace{\log_2 \ldots \log_2}_{n} (p_n + 1).$$

Очевидно, из неравенств

$$p_n < \log_2 p_{n+1} < \log_2 (p_{n+1} + 1) < p_n + 1$$

имеем $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$, так что u_n, v_n — монотонные последовательности. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$ и $u_n < \alpha < v_n$.

$$\alpha = \underbrace{\log_2 \ldots \log_2}_{n} \alpha_n,$$

то в силу монотонности функции $y = \log_2 x$ получим $p_n < \alpha_n < p_n + 1$, т.е. $p_n = [\alpha_n]$. Доказательство теоремы 7 закончено.

Лекция 8

§ 6. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО–ВЕЙЕРШТРАССА О СУЩЕСТВОВАНИИ ЧАСТИЧНОГО ПРЕДЕЛА У ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность и пусть $\{k_n\}$ — некоторая строго возрастающая последовательность, состоящая из натуральных чисел. Тогда последовательность $b_n = a_{k_n}$ называется* **подпоследовательностью** *последовательности a_n.*

Определение 2. *Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, то l называется* **частичным пределом** *или* **предельной точкой** *последовательности $\{a_n\}$.*

Т е о р е м а 1 (теорема Больцано–Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию имеем, что найдется $c > 0$ такое, что $|a_n| \le c$ для всех n. Разделим отрезок $I_0 = [-c, c]$ пополам. Один из получившихся отрезков содержит бесконечное число членов последовательности. Назовем его I_1 и в качестве первого члена в искомой подпоследовательности возьмем какой-либо элемент $a_{n_1} \in I_1$, т.е. положим $b_1 = a_{n_1}$. Затем отрезок I_1 снова разобьем на два и обозначим через I_2 ту его половину, которая содержит бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Среди них выберем такой член a_{n_2}, номер которого n_2 превосходит число n_1, и положим $b_2 = a_{n_2}$. Повторяя описанную процедуру применительно к отрезку I_2, получим отрезок $I_3 \subset I_2$ и член $b_3 = a_{n_3}$ с условием $n_3 > n_2$. Далее таким же образом найдем $b_4 = a_{n_4} \in I_4 \subset I_3$, $b_5 = a_{n_5} \in I_5 \subset I_4$ и т.д. В результате мы получим числовую последовательность $\{b_k\}$ и последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}$, причем $b_k \in I_k$, $b_k = a_{n_k}$, $n_k < n_{k+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Другими словами, $\{b_k\}$ будет подпоследовательностью для $\{a_k\}$.

Осталось показать, что $\{b_k\}$ сходится. Для этого заметим, что длина δ_k отрезка I_k равна $c \cdot 2^{-k+1}$, откуда $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Это значит, что последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}$ стягивается и все отрезки I_k имеют единственную общую точку l. Именно это число l и будет пределом для $\{b_k\}$. Действительно, если $I_k = [s_k, t_k]$, то $s_k \le l \le t_k$, $t_k - s_k = \delta_k$, $\alpha_k = l - s_k \le \delta_k$, $\beta_k = t_k - l \le \delta_k$. Но так как $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\alpha_k \to 0$ и $\beta_k \to 0$, откуда $s_k = l + \alpha_k \to l$, $t_k = l + \beta_k \to l$. И так как $b_k = a_{n_k}$, $s_k \le a_{n_k} \le t_k$, то $b_k = a_{n_k} \to l$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать.

§ 7. КРИТЕРИЙ КОШИ ДЛЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Очевидно, что из теоремы 1 §6 прямо вытекает следующее необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

Определение 1. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* **фундаментальной** *или* **последовательностью Коши**, *если выполнено условие:*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon),\ \text{такое, что}\ \forall\ m, n > n_0\ \text{имеем}\ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность* $\{a_n\}$ *сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. Необходимость. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такое, что для всякого $n > n_0$ имеем $|a_n - l| < \varepsilon/2$.

Следовательно, для любых $m, n > n_0$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) - (a_m - l)| \le |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность.

Достаточность. По условию последовательность $\{a_n\}$ является фундаментальной.

1. Докажем, что $\{a_n\}$ ограничена. В самом деле, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда найдется $n_0 = n_0(1)$ такое, что для всех $n \ge n_0$ имеем $|a_n - a_{n_0}| < 1$. Но тогда

$$|a_n| \le |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| = h.$$

Отсюда

$$|a_n| \le \max(|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, h) = c.$$

2. В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, \cdots \to a$ при $k \to \infty$.

Условие ее сходимости можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ k_1 = k_1(\varepsilon)\ \text{такое, что}\ \forall\ k > k_1\ \text{имеем}\ |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2.$$

Пусть $N_1 = n_{k_1}$ и $N = \max\left(n_0\left(\varepsilon/2\right), N_1\right)$. Тогда для всех $n > N$ и $n_k > N$ имеем

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{a_n\}$ сходится. Теорема 1 доказана полностью.

Важно отметить, что теорема 1 допускает следующую переформулировку, полезную для доказательства расходимости конкретных последовательностей.

Т е о р е м а 2. *Для расходимости последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы она не была фундаментальной, т.е. существовало число $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $n_0 \in \mathbb{N}$ нашлись бы номера $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$, для которых выполнялось бы неравенство*

$$|a_m - a_n| \geq \varepsilon.$$

Примеры. 1. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Возьмем $\varepsilon = 1/2$. Тогда при любом m имеем неравенство

$$x_{2m} - x_m = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Последовательность $\{a_n\}$ расходится (здесь мы полагаем $m = n_0$, $n = 2m$).

2. Для решения *уравнения Кеплера*

$$x - \alpha \sin x = y \quad (0 < \alpha < 1)$$

используют *метод последовательных приближений:*

$$x_0 = y,\ \ x_1 = y + \alpha \sin x_0, \ldots,\ \ x_n = y + \alpha \sin x_{n-1}.$$

Докажем, что существует $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и что $x = \xi$ является единственным корнем уравнения Кеплера.

Согласно критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ и при всех $p \geq 1$ имеем $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Оценим модуль разности $|x_{n+p} - x_n|$. В силу неравенства $|\sin y| \leq |y|$ имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \alpha|\sin x_{n+p-1} - \sin x_{n-1}| \leq \alpha|x_{n+p-1} - x_{n-1}| \leq$$
$$\leq \alpha^2|x_{n+p-2} - x_{n-2}| \leq \alpha^n|x_p - x_0| = \alpha^{n+1}|\sin x_{p-1}| \leq \alpha^{n+1}.$$

Далее поскольку $|\alpha| < 1$, последовательность $\{\alpha^{n+1}\}$ является бесконечно малой последовательностью. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_1$ имеем $|\alpha^{n+1}| < \varepsilon$.

Теперь в теореме 1 положим $n_0 = n_1$. В результате получим, что последовательность является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому числу ξ. Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $x_n = y + \alpha \sin x_{n-1}$, получим $\xi = y + \alpha \sin \xi$, т.е. $x = \xi$ есть решение уравнения Кеплера. Далее, если ξ_1 — другое его решение, то тогда $|\xi_1 - \xi| = \alpha|\sin \xi_1 - \sin \xi| \leq \alpha|\xi_1 - \xi|$, и если $\xi_1 \neq \xi$, то отсюда имеем $1 \leq \alpha$, что не так по условию. Другими словами, $x = \xi$ — единственный корень уравнения, что и требовалось доказать.

Уравнение Кеплера ввел в рассмотрение И. Кеплер (1571-1630) при изучении движения планет по эллиптической орбите (задача двух тел).

Глава III
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Лекция 9

§ 1. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Мы познакомились с понятием предела числовой последовательности. Последовательность — это функция, определенная на множестве натуральных чисел. Но еще большую роль в анализе играет понятие предела функции, определенной на всей числовой оси или на каком-либо ее промежутке либо луче. В дальнейшем мы будем рассматривать целый ряд понятий подобного рода. Эти понятия по своему духу близки как между собой, так и с уже рассмотренным нами понятием предела последовательности. Перечислим наиболее важные из них:

1) $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке x_0;
2) $l = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ — правый предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3) $l = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ — левый предел функции $f(x)$ в точке x_0;
4) $l = \lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x\to\infty$;
5) $l = \lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x\to\pm\infty$;

Будем считать, что функция $f(x)$, о пределе которой будем говорить, определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ или на некотором множестве A, являющемся его подмножеством, т.е. $A\subset\mathbb{R}$. Этим множеством A, например, может быть интервал, отрезок, совокупность промежутков и вообще какое угодно бесконечное множество. Важно только, чтобы точка x_0, к которой устремляется аргумент функции $f(x)$ (т.е. $x\to x_0$), являлась *предельной точкой множества* A, а именно: чтобы в любой δ-окрестности точки x_0 содержалось бесконечно много точек из множества A. В случае $x\to\infty$ или $x\to\pm\infty$ это означает, что множество A должно быть: не ограничено, если $x\to\infty$; не ограничено сверху, если $x\to+\infty$; не ограничено снизу, если $x\to-\infty$.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Определение. Множество точек x, принадлежащих A и удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, называется *проколотой δ-окрестностью точки* x_0 (относительно множества A).

При $A=\mathbb{R}$ проколотая δ-окрестность точки x_0 состоит из двух интервалов: $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$.

Определения предела .

<table>
<tr><th>Обозначения</th><th>По Коши</th><th>По Гейне</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to x_0$</td><td colspan="2">Число l называется пределом функции $f(x)$
при $x \to x_0$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ последовательности
$\{x_n\}$: $x_n \neq x_0 \; \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n \in A$ и $x_n \to x_0$
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to x_0+$</td><td colspan="2">Число l называется правым пределом функции $f(x)$
при $x \to x_0$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A, 0 < x - x_0 < \delta)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ последовательности
$\{x_n\}$: $x_n > x_0 \; \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n \in A$ и $x_n \to x_0$
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to x_0-$</td><td colspan="2">Число l называется левым пределом функции $f(x)$
при $x \to x_0$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A, -\delta < x - x_0 < 0)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ последовательности
$\{x_n\}$: $x_n < x_0 \; \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n \in A$ и $x_n \to x_0$
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to \infty$</td><td colspan="2">Число l называется пределом функции $f(x)$
при $x \to \infty$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; c = c(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A, |x| > c)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ бесконечно большой
последовательности $\{x_n\}$:
$x_n \in A$,
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to +\infty$</td><td colspan="2">Число l называется пределом функции $f(x)$
при $x \to +\infty$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; c = c(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A, x > c)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ бесконечно большой последовательности $x_n > 0$:
$x_n \in A$,
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to -\infty$</td><td colspan="2">Число l называется пределом функции $f(x)$
при $x \to -\infty$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; c = c(\varepsilon) < 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A, x < c)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ бесконечно большой последовательности $x_n < 0$:
$x_n \in A$,
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
</table>

Для всех этих видов пределов справедливы теоремы, аналогичные теоремам о пределах последовательности. Например, если $f_1(x) \to l_1$, $f_2(x) \to l_2$ (при одном и том же виде стремления аргумента x), то:

1) $f_1(x) \pm f_2(x) \to l_1 \pm l_2$,
2) $f_1(x)f_2(x) \to l_1 l_2$,
3) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \to \frac{l_1}{l_2}$ при $l_2 \neq 0$.

Если $c(x)$ — постоянная, т.е. $c(x) = l$ для любого $x \in A$, то $c(x) \to l$.

Доказательства этих теорем, по существу, повторяют доказательство утверждений для сходящихся последовательностей. Но тем не менее их надо провести, а это заняло бы у нас очень много времени. Для того чтобы этого избежать, мы дадим общее определение предела, под которое будут подходить все рассмотренные нами пределы, в том числе и предел последовательности. Речь идет о так называемом **пределе по базе множеств**.

§ 2. БАЗА МНОЖЕСТВ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО БАЗЕ

Определение 1. *Пусть A есть область определения функции $f(x)$. Тогда совокупность множеств $\{b\} = B$, где $b \subset A$, называется* **базой множеств** *или просто* **базой** *для множества A, если для ее элементов выполняются следующие условия:*

1) B состоит из бесконечного числа непустых множеств $\{b\}$;

2) $\forall\ b_1, b_2 \in B\ \exists\ b_3 \in B$ такое, что $b_3 \subset b_1 \cap b_2$.

(Здесь надо помнить, что b_1, b_2, b_3 суть подмножества множества A.)

Элементы множества B называются **окончаниями** базы B. Само множество A будем называть **основным множеством** базы B. Далее для любых двух окончаний b_1 и b_2 базы B с условием $b_2 \subset b_1$ будем говорить, что b_2 следует за b_1, а b_1 предшествует b_2.

Определение 2. *Число l называется* **пределом функции** $f(x)$ **по базе** B, *если для любого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b \in B$ такое, что при всех $x \in b$ имеем неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

Обозначение:

$$\lim_B f(x) = l \quad \text{или} \quad f(x) \to l \ \text{(по базе } B).$$

В этом случае еще говорят, что $f(x)$ сходится к l по базе B. Аналогично определяются следующие пределы:

$$\lim_B f(x) = \infty \ \ (\pm\infty).$$

Следует заметить, что с точки зрения формальной корректности определения 2 предела функции по базе B, вообще говоря, требование бесконечности множества окончаний в базе B является избыточным.

В случае конечного количества окончаний данное определение малосодержательно и не отражает в достаточной степени существа понятия предела.

Важно отметить, что если вместо основного множества A базы B взять любое ее окончание b_0, то совокупность B' окончаний базы B, следующих за b_0, с учётом сделанного выше замечания, тоже образует базу множеств. При этом из существования предела $\lim\limits_{B} f(x) = l$ следует, что существует предел $\lim\limits_{B'} f(x) = l$ и наоборот. В силу этого свойства на практике между базами B и B' фактически не делается никакого различия.

Примеры баз.

1. $A = \mathbb{N}$. База B_0 (обозначение: $n \to \infty$) состоит из множеств $b = N_s$, $s \geq 1$, где N_s — множество натуральных чисел $\{s, s+1, s+2, \dots\}$. Тогда предел по базе B_0 — это предел последовательности $\{a_n\}$:

$$x = n, \quad f(x) = a_n \text{ и } \lim_{B_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

2. $A = \mathbb{R}$. База B_1 состоит из всех проколотых δ-окрестностей точки x_0, $\delta > 0$ (обозначение: $x \to x_0$). Тогда $\lim\limits_{B_1} f(x)$ — это предел при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{B_1} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

3. $A = \mathbb{R}$. База B_2 $(x \to x_0+)$ состоит из всех интервалов вида $(x_0, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$,

$$\lim_{B_2} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

4. $A = \mathbb{R}$. База B_3 $(x \to x_0-)$ состоит из всех интервалов вида $(x_0 - \delta, x_0)$, где $\delta > 0$,

$$\lim_{B_3} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

5. $A = \mathbb{R}$. База B_4 $(x \to \infty)$ состоит из всех множеств $\{b\}$, где b есть объединение двух лучей: $(-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, $c > 0$,

$$\lim_{B_4} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

6. $A = \mathbb{R}$. База B_5 $(x \to +\infty)$ состоит из всех лучей вида $(c, +\infty)$, где $c > 0$,

$$\lim_{B_5} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

7. $A = \mathbb{R}$. База B_6 $(x \to -\infty)$ состоит из всех лучей вида $(-\infty, c)$, где $c < 0$,

$$\lim_{B_6} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Легко убедиться в том, что все эти совокупности множеств $B_1, B_2, \ldots, B_7$ действительно удовлетворяют определению базы. Проверка всех этих множеств на соответствие определению базы однотипна. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только множества B_2.

1) B_2 состоит из окончаний $b = b_\delta$ вида $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \neq \varnothing$, где δ — произвольное положительное число. Следовательно, B_2 является бесконечным множеством, и каждое его окончание b_δ не пусто.

2) При всех $\delta_1 \leq \delta_2$ имеем $b_{\delta_1} \cap b_{\delta_2} = b_{\delta_1}$, т.е. и второе условие базы выполнено.

Таким образом, множество B_2 является базой множеств.

Определение 3. *Пусть множество $D \subset A$ (где A — область определения $f(x)$) и пусть существует $c > 0$ такое, что $|f(x)| < c$ при всех $x \in D$. Тогда функция $f(x)$ называется* **ограниченной** *(числом c) на множестве D.*

Аналогично определяется ограниченность функции $f(x)$ на множестве D сверху и снизу.

Определение 4. *Функция, ограниченная (ограниченная сверху, снизу) на каком-либо окончании базы B, называется* **финально ограниченной(финально ограниченной сверху, снизу)** *относительно этой базы.*

Утверждение 1. а) *Пусть $f(x) = c$ при всех $x \in b$, где b — некоторое окончание базы B. Тогда $\lim\limits_{B} f(x) = c$.*

б) Если предел функции по базе B существует, то он единственен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем окончание $b \in B$. Тогда при всех $x \in b$ имеем $|f(x) - c| = 0 < \varepsilon$.

б) Допустим противное, т.е. что существуют $l_1 \neq l_2$ такие, что

$$\lim_{B} f(x) = l_1, \quad \lim_{B} f(x) = l_2.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$. Тогда:

$$\exists\ b_1 = b_1(\varepsilon) \in B \text{ такое, что } \forall\ x \in b_1 \text{ имеем } |f(x) - l_1| < \varepsilon;$$

$$\exists\ b_2 = b_2(\varepsilon) \in B \text{ такое, что } \forall\ x \in b_2 \text{ имеем } |f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

По определению базы существует b_3 такое, что $b_3 \subset b_1 \cap b_2$. Выберем какое-нибудь $x \in b_3$. Тогда имеем

$$|l_1 - l_2| = |(f(x) - l_2) - (f(x) - l_1)| \leq |f(x) - l_2| + |f(x) - l_1| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|,$$

что невозможно. Утверждение 1 доказано полностью.

Утверждение 2. *а) Если* $\lim\limits_{B} f(x) = l$, *то функция* $f(x)$ *финально ограничена числом* $|l| + 1$.

б) Если $\lim\limits_{B} f(x) = l$ *и* $l \neq 0$, *то функция* $g(x) = 1/f(x)$ *финально ограничена числом* $2/|l|$ *на окончании* $b(|l|/2)$, *а функция* $f(x)$ *на том же окончании имеет знак, совпадающий с* l.

Доказательство.

Для базы B_1 $(x \to x_0)$	В общем случае
а) Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда найдется $\delta = \delta(1)$ такое, что при всех x из проколотой δ-окрестности имеем $\lvert f(x) - l\rvert < 1$. Отсюда при всех x: $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ имеем $\lvert f(x)\rvert = \lvert (f(x) - l) + l\rvert \leq$ $\leq \lvert f(x) - l\rvert + \lvert l\rvert \leq 1 + \lvert l\rvert$, что и требовалось доказать.	а) Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда найдется $b = b(1)$ — окончание базы B такое, что при всех $x \in b$ имеем $\lvert f(x) - l\rvert < 1$. Отсюда при всех $x \in b$ получим $\lvert f(x)\rvert = \lvert (f(x) - l) + l\rvert \leq$ $\leq \lvert f(x) - l\rvert + \lvert l\rvert \leq 1 + \lvert l\rvert$, что и требовалось доказать.
б) Разберем только случай $l > 0$ (второй случай аналогичен). Возьмем $\varepsilon = l/2$. Тогда найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x: $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ имеем $\lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon = l/2$. Следовательно, справедливы неравенства: $f(x) - l > -l/2$, $f(x) > l/2 > 0$, $0 < g(x) = 1/f(x) < 2/l$. Утверждение 2 доказано.	б) Разберем только случай $l > 0$ (второй случай аналогичен). Возьмем $\varepsilon = l/2$. Тогда найдется $b = b(\varepsilon) > 0$ — окончание базы B такое, что при всех $x \in b$ имеем $\lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon = l/2$. Следовательно, справедливы неравенства: $f(x) - l > -l/2$, $f(x) > l/2 > 0$, $0 < g(x) = 1/f(x) < 2/l$. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{B} f(x) = l_1, \quad \lim_{B} g(x) = l_2.$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{B}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2.$$

Выражаясь не вполне строго, можно сказать, что предел суммы двух функций равен сумме их пределов.

Доказательство.

$x \to x_0$	В общем случае
В качестве радиуса искомой	В качестве окончания $b(\varepsilon)$
δ-окрестности возьмем	
$\delta = \min(\delta_1(\varepsilon/2), \delta_2(\varepsilon/2))$, где	возьмем одно какое-либо
$\delta_1(\varepsilon/2)$ — это радиус	
проколотой δ_1-окрестности	окончание b_3 такое, что
точки x_0, в которой $\lvert f(x) - l_1 \rvert < \varepsilon/2$,	$b_3 \subset b_1(\varepsilon/2) \cap b_2(\varepsilon/2)$,
а δ_2 — это радиус	
проколотой δ_2-окрестности	где $b_1(\varepsilon/2)$ — окончание,
точки x_0, где $\lvert g(x) - l_2 \rvert < \varepsilon/2$.	на котором
Тогда проколотая δ-окрестность	
точки x_0	$\lvert f(x) - l_1 \rvert < \varepsilon/2$,
содержится и в δ_1-окрестности,	а $b_2(\varepsilon/2)$ — это окончание,
и в δ_2-окрестности точки x_0.	на котором $\lvert g(x) - l_2 \rvert < \varepsilon/2$.
Поэтому имеем $\forall x:\ 0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	Тогда $\forall x \in b_3$ имеем
$\lvert (f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2) \rvert \le$	$\lvert (f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2) \rvert \le$
$\le \lvert f(x) - l_1 \rvert + \lvert g(x) - l_2 \rvert < \varepsilon$,	$\le \lvert f(x) - l_1 \rvert + \lvert g(x) - l_2 \rvert < \varepsilon$,
что и требовалось доказать.	что и требовалось доказать.

Утверждение 4. *Пусть $f(x) = g(x)$ при всех $x \in b$, где b — некоторое окончание базы B и $\lim\limits_{B} f(x) = l$. Тогда $\lim\limits_{B} g(x) = l$.*

Доказательство. Имеем $g(x) = f(x) + (g(x) - f(x))$. Так как при всех $x \in b$ имеем $g(x) - f(x) = 0$, то по утверждению 1 а) получим $\lim\limits_{B}(g(x) - f(x)) = 0$. Отсюда

$$\lim_{B} g(x) = \lim_{B} f(x) + \lim_{B}(g(x) - f(x)) = l + 0 = l,$$

что и требовалось доказать.

Определение 5. *Если $\lim\limits_{B} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется* **бесконечно малой функцией** *по базе B.*

Замечание. Из утверждений 1 а) и 3 следует, что условие существования предела $\lim\limits_{B} f(x) = l$ эквивалентно условию, что функция

$$\alpha(x) = f(x) - l$$

есть бесконечно малая по базе B.

Утверждение 5. *Пусть функция $\alpha(x)$ является бескрнечно малой по базе B, $f(x)$ финально ограничена по той же базе,*

$$|\beta(x)| \le |\alpha(x) f(x)|.$$

Тогда функция $\beta(x)$ будет бесконечно малой по базе B.

Доказательство.

$x \to x_0$	В общем случае
Для любого $\varepsilon > 0$ надо указать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x$: $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert \beta(x) \rvert < \varepsilon$	Для любого $\varepsilon > 0$ надо указать окончание $b = b(\varepsilon)$ базы B такое, что при всех $x \in b \Rightarrow \lvert \beta(x) \rvert < \varepsilon$.
В силу финальной ограниченности функции $f(x)$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что $\forall x$: $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta_1$ $\lvert f(x) \rvert < C$.	В силу финальной ограниченности функции $f(x)$ окончание b_1 такое, что при всех $x \in b_1 \Rightarrow \lvert f(x) \rvert \leq C$.
Найдется $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon / C) > 0$ такое, что $\forall x$: $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta_2$ имеем $\lvert \alpha(x) \rvert < \varepsilon_1$.	Найдется $b_2 = b_2(\varepsilon_1) \in B$ такое, что при всех $x \in b_2 \Rightarrow \lvert \alpha(x) \rvert < \varepsilon / C$.
Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2(\varepsilon))$.	Возьмем окончание b_3 из условия $b_3 \subset b_1 \cap b_2(\varepsilon_1)$.
Тогда $\forall x$: $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ имеем $\lvert \beta(x) \rvert \leq \lvert \alpha(x) \rvert \cdot \lvert f(x) \rvert < \varepsilon / C \cdot C = \varepsilon$, что и требовалось доказать.	Тогда при всех $x \in b(\varepsilon)$ имеем $\lvert \beta(x) \rvert \leq \lvert \alpha(x) \rvert \cdot \lvert f(x) \rvert < \varepsilon / C \cdot C = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Утверждение 6. *Пусть* $\lim\limits_B f(x) = l_1$, $\lim\limits_B g(x) = l_2$. *Тогда*

$$\lim_B f(x) g(x) = l_1 l_2.$$

Доказательство. Имеем $f(x) = l_1 + \alpha(x)$, $g(x) = l_2 + \beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые функции по базе B. Тогда получим

$$f(x)g(x) - l_1 l_2 = \alpha(x) l_2 + \beta(x) l_1 + \alpha(x)\beta(x) \text{ — б.м.},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 7. *Пусть* $\lim\limits_B f(x) = l_1$, $\lim\limits_B g(x) = l_2$, $l_2 \neq 0$. *Тогда*

$$\lim_B \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1 + \alpha(x)}{l_2 + \beta(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha(x) l_2 - \beta(x) l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{g(x)} = \gamma(x).$$

Здесь $\dfrac{\alpha(x) l_2 - \beta(x) l_1}{l_2}$ — бесконечно малая функция по базе B, $1/g(x)$ — финально ограниченная функция по той же базе, поэтому $\gamma(x)$ есть бесконечно малая функция по базе B, что и требовалось доказать.

Лекция 10

§ 3. СВОЙСТВО МОНОТОННОСТИ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Утверждение 1. *Пусть $c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{B} f(x) = l$ и, кроме того, $f(x) > c$ (или $f(x) \geq c$) на некотором окончании b базы B. Тогда $l \geq c$.*

Доказательство. По условию $\alpha(x) = f(x) - l$ — бесконечно малая функция, причем для всех $x \in b$

$$\alpha(x) = f(x) - l \geq c - l.$$

Допустим, что $c - l > 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{c-l}{2}$ найдется окончание $b_1 \in B$ такое, что при всех $x \in b_1$ имеет место неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Заметим, что найдутся окончание $b_2 \subset b \cap b_1$ и точка $x \in b_2$, для которой выполнены неравенства

$$\varepsilon > |\alpha(x)| \geq \alpha(x) \geq c - l = 2\varepsilon > 0.$$

Отсюда вытекает, что $0 < 2\varepsilon < \varepsilon$, что невозможно. Тем самым утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Пусть* $\lim_B f(x) = l_1$, $\lim_B g(x) = l_2$,

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{на некотором окончании } b \text{ базы } B.$$

Тогда $l_1 \leq l_2$.

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = g(x) - f(x)$. По условию $h(x) \geq 0$, $\lim\limits_{B} h(x) = l = l_2 - l_1$. Из утверждения 1 имеем $l \geq 0$, т.е. $l_2 \geq l_1$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. *Пусть $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ на некотором окончании базы B,*

$$\lim_{B} f(x) = l, \quad \lim_{B} h(x) = l.$$

Тогда существует $\lim\limits_{B} g(x) = l$.

Доказательство. Из условия имеем

$$0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x),$$
$$\alpha(x) = h(x) - f(x) \to 0 \text{ (по базе } B),$$

т.е. $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция по базе B.

Но так как $|g(x)-f(x)| \le \alpha(x)$, то по утверждению 5 § 2 $g(x)-f(x)$ — бесконечно малая функция по базе B. Тогда

$$\lim_B g(x) = \lim_B (g(x) - f(x)) + \lim_B f(x) = 0 + l = l,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. КРИТЕРИЙ КОШИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ПО БАЗЕ

Теорема (Критерий Коши). *Для существования предела функции $f(x)$ по базе B необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало окончание $b = b(\varepsilon)$ такое, что при всех $x, y \in b$ было справедливо неравенство*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_B f(x) = l$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b_1 = b_1(\varepsilon/2) \in B$ такое, что при всех $x, y \in b_1$ имеем

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда при всех $x, y \in b_1$

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - l| + |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Докажем, что $f(x)$ финально ограничена. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда существует $b(1) \in B$ такое, что при всех $x, y \in b(1)$ имеем $|f(x) - f(y)| < 1$. Зафиксируем y. Тогда при всех $x \in b(1)$

$$|f(x)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y)| \le 1 + |f(y)|.$$

В силу условия Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует $b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x, y \in b(\varepsilon)$ имеем $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Но это значит, что ε есть верхняя грань значений величины $|f(x) - f(y)|$ для всех $x, y \in b(\varepsilon)$. Используя также финальную ограниченность $f(x)$, получим

$$m(\varepsilon) = \inf_{x \in b(\varepsilon)} f(x) \in \mathbb{R}, \quad M(\varepsilon) = \sup_{x \in b(\varepsilon)} f(x) \in \mathbb{R},$$
$$\varepsilon \geq \sup_{x,y \in b(\varepsilon)} |f(x) - f(y)| = \sup_{x,y \in b(\varepsilon)} (f(x) - f(y)) =$$
$$= \sup_{x \in b(\varepsilon)} f(x) - \inf_{y \in b(\varepsilon)} f(y) = M(\varepsilon) - m(\varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = \varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Тогда можно считать, что $b(\frac{1}{n_2}) \subset b(\frac{1}{n_1})$ при всех $n_2 > n_1$. Действительно, если, например, $b(\frac{1}{2}) \not\subset b(1)$, то вместо $b(\frac{1}{2})$ можно взять b_3 из условия $b_3 \subset b(1) \cap b(\frac{1}{2})$ и т.д. В силу этого имеем

$$m\left(\frac{1}{n_1}\right) \leq m\left(\frac{1}{n_2}\right), \quad M\left(\frac{1}{n_1}\right) \geq M\left(\frac{1}{n_2}\right).$$

Кроме того, при всех $x \in b(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$m(\varepsilon) \leq f(x) \leq M(\varepsilon).$$

Каждому $\varepsilon = \varepsilon_n > 0$ соответствует свой отрезок $I_n = \left[m(\frac{1}{n}), M(\frac{1}{n})\right]$. Вся совокупность отрезков I_n образует последовательность стягивающихся отрезков, так как при $\varepsilon_n > \varepsilon_s$

$$m(\varepsilon_n) \leq m(\varepsilon_s) \leq M(\varepsilon_s) \leq M(\varepsilon_n),$$

т.е. $I_s \subset I_n$.

По лемме о системе стягивающихся вложенных отрезков существует точка l такая, что для любого номера n имеем $l \in I_n$.

Докажем, что

$$\lim_B f(x) = l.$$

Для этого нам надо доказать, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $b_1(\varepsilon_0) \in B$ такое, что при всех $x \in b_1(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - l| < \varepsilon_0.$$

В качестве $b_1(\varepsilon_0)$ возьмем $b(\frac{1}{n})$, где $n > 2\varepsilon_0^{-1}$. Тогда при всех $x, y \in b_1(\varepsilon_0)$ по условию Коши выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

И при всех $x \in b_1(\varepsilon_0)$ имеем

$$m\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(x) \leq M\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, $l \in I\left(\frac{1}{n}\right)$. Это значит, что

$$m\left(\frac{1}{n}\right) \leq l \leq M\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда

$$|f(x) - l| \leq M\left(\frac{1}{n}\right) - m\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0.$$

Теорема доказана полностью.

Определение. *Две базы B_1 и B_2 называются* **эквивалентными**, *если любое окончание базы B_1 содержится в некотором окончании базы B_2, и наоборот.*

Заметим, что для эквивалентных баз утверждения о пределах будут выполняться одновременно.

§ 5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ СХОДИМОСТИ ПО КОШИ И ПО ГЕЙНЕ

Т е о р е м а. *Сходимости функции $f(x)$ по Коши и по Гейне при $x \to x_0$ эквивалентны. Другими словами, существование предела функции по Коши при $x \to x_0$ влечет за собой существование предела функции по Гейне по той же базе и наоборот, причем в обоих случаях значения пределов совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по Коши. Докажем, что существует соответствующий предел по Гейне.

Действительно, из условия имеем, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ такое, что } \forall\ x:\ \ 0 < |x - x_0| < \delta$$

выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, стремящаяся к x_0 при $n \to \infty$ и $x_n \neq x_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует $N_1 = N_1(\delta)$ такое, что при всех $n > N_1$

$$0 < |x_n - x_0| < \delta.$$

Так как δ можно взять любым, то и для $\delta = \delta(\varepsilon)$ справедливо то же утверждение.

Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\forall\ n > N(\varepsilon) \text{ имеем } |f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

Положим $N(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$. Тогда, ввиду того, что

$$0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon),$$

имеем $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Тем самым прямое утверждение доказано.

2. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть для любой последовательности $\{x_n\}$ с условиями $x_n \to x_0$ и $x_n \neq x_0$ имеем $f(x_n) \to l$ при $n \to \infty$.

Далее будем рассуждать от противного. Пусть l не является пределом функции $f(x)$ по Коши. Это значит, что найдется $\varepsilon > 0$, такое, что

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\ x:\ \ 0 < |x - x_0| < \delta,$$

для которого выполняется неравенство $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = 1/n$. Тогда для любого n найдется число x_n такое, что: 1) $x_n \neq x_0$, 2) $|x_n - x_0| < 1/n$, но 3) $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Заметим, что числа $\{x_n\}$ образуют последовательность, сходящуюся к x_0. Следовательно, в силу сходимости по Гейне при $n \to \infty$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Но тогда, переходя к пределу в неравенстве $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$, будем иметь $0 = |l - l| \geq \varepsilon$. Полученное противоречие устанавливает справедливость второго утверждения теоремы. Доказательство закончено.

§ 6. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Напомним, что сложной функцией $h(x)$ называют функцию вида

$$h(x) = f(g(x)),$$

где $f(y)$ и $g(x)$ — некоторые функции такие, что область определения $f(y)$ содержит *все* множество значений, принимаемых функцией $g(x)$. Функцию $h(x)$ еще называют композицией (или суперпозицией) функций f и g. Символически это записывается так: $h = f \circ g$.

Следовало бы ожидать, что справедлива следующая **теорема:** *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = l$. *Тогда имеем*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

Такое утверждение справедливо, например, для непрерывных функций. Однако в общем случае эта теорема неверна.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad f(g(x)) = 1 \ \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1.$$

Тем не менее, справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$. *Тогда имеем*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$. Далее, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y: $|y - y_0| < \delta_1$ имеем $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Для этого δ_1 существует $\delta = \delta(\delta_1) > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем

$$|g(x) - y_0| < \delta_1.$$

Полученное δ нам и требовалось найти.

Теперь при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем $|g(x) - y_0| < \delta_1$. Следовательно, $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{y\to a} f(y) = f(a)$. *Тогда имеем*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. По условию имеем:

1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y с условием $|y - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$;

2) существует $n_0 = n_0(\delta_1)$ такое, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta_1$.

Положим $n_0 = n_0(\delta_1(\varepsilon))$. Тогда при всех $n > n_0$ имеем

$$|x_n - a| < \delta_1 \text{ и } |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, *причем для всех* x *из некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *имеем* $g(x) \neq y_0$, *и пусть*

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = l.$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(g(x)) - l| < \varepsilon.$$

По условию имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y с условием $0 < |y - y_0| < \delta_1$ выполняется неравенство

$$|f(y) - l| < \varepsilon.$$

Для заданного $\delta_1 > 0$ имеем также, что существует $\delta_2 = \delta(\delta_1) > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|g(x) - y_0| < \delta_1$. И, кроме того, по условию существует $\delta_3 > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta_3$ справедливо неравенство $g(x) \neq y_0$. Тогда возьмем

$$\delta = \min(\delta_3, \delta_2(\delta_1(\varepsilon))).$$

Получим, что при этой величине δ выполняется требуемое неравенство. Теорема 3 доказана.

Пусть теперь $f(x)$ имеет предел по базе B. В каком случае сложная функция $h(t) = f(g(t))$ по некоторой другой базе D имеет тот же предел? Другими словами, когда в функции, стоящей под знаком предела, разрешается делать замену переменной x на новую переменную t с соответствующей заменой базы B на новую базу D так, чтобы значение предела сохранялось? Здесь имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\lim\limits_{B} f(x) = l$. *Тогда для того чтобы существовал*

$$\lim_{D} f(g(t)) = l,$$

достаточно, чтобы при отображении $x = g(t)$ каждое окончание b базы B содержало (целиком !) образ некоторого окончания d базы D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения предела функции по базе B имеем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b = b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x \in b$ имеем $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Из условия теоремы следует, что существует окончание $d \in D$ такое, что $g(d) \subset b$, и, следовательно, для любого $t \in d$

$$|f(g(t)) - l| < \varepsilon,$$

что и означает справедливость утверждения теоремы. Доказательство закончено.

Примеры. 1. Пусть

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l, \quad x = \frac{1}{t}.$$

Тогда
$$\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = l.$$

Действительно, любое окончание $b = \{x \mid \ |x| > c\}$ базы B $(x \to \infty)$ содержит целиком образ окончания $d = \{t \mid \ |t| < 1/c\}$ базы D $(t \to 0)$.

2. Пусть
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

и $g(t) \equiv 0$. Тогда
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \text{ но } \lim_{t\to 0} f(g(t)) = 1,$$

т.е. сложная функция имеет другой предел. В этом случае окончания $b_\delta \in B$ $(x \to 0)$ имеют вид $0 < |x| < \delta$, но образ любого окончания $d \in D$, $d = \{t \mid \ 0 < |t| < \delta_1\}$, имеет вид $x \equiv 0$, т.е. в окончании b_δ базы B не содержится образ ни одного окончания базы D, т.е. *не выполнены* условия теоремы 1.

3. Пусть $f(x) \to l$ при $x \to a$ и $g(t) \to a$ при $t \to b$, причем $g(t) \neq a$ в некоторой проколотой окрестности точки b. Тогда для сложной функции $h(t)$ имеем $h(t) = f(g(t)) \to l$ при $t \to b$.

Действительно, каждое окончание базы $x \to a$ представляет собой некоторую проколотую окрестность точки $x = a$. Но в силу условия $g(t) \to a$ и $g(t) \neq a$ при $t \to b$ эта окрестность содержит образ некоторой проколотой окрестности точки $t = b$ при отображении $x = g(t)$. Таким образом, здесь выполнены условия теоремы 1, и поэтому $h(t) \to l$ при $t \to b$, что и требовалось доказать.

Доказанные нами теоремы применяются при вычислении пределов функций.

4. При $x \to 0$ имеем
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x + 1} \to \frac{0^2 + 2\cdot 0 + 1}{0^3 + 0 + 1} = 1.$$

5. При $x \to 2$ имеем
$$f(x) \to \frac{2^2 + 2\cdot 2 + 1}{2^3 + 2 + 1} = \frac{9}{11}.$$

6. При $x \to \infty$ имеем
$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \to 0.$$

§ 7. ПОРЯДОК БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ФУНКЦИИ

Определение 1. *Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ бесконечно малые функции по базе B. Тогда, если $\alpha(x)$ представлена в виде*

$$\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x),$$

то говорят, что $\alpha(x)$ **имеет больший (или более высокий) порядок малости, чем $\beta(x)$ или $\gamma(x)$.**

Определение 2. *Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются* **эквивалентными** *(по базе B), если разность*

$$\delta(x) = \alpha(x) - \beta(x)$$

имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)$ (или $\beta(x)$). В этом случае пишут: $\alpha \sim \beta$ (по базе B).

Утверждение 1. *Следующие утверждения эквивалентны: 1) $\alpha \sim \beta$ (по базе B); 2) $\frac{\beta}{\alpha} \sim 1$ (по базе B), $\frac{\alpha}{\beta} \sim 1$ (по базе B).*

Доказательство. 1) По условию $\delta = \alpha - \beta$ имеет более высокий порядок малости, чем α, т.е. $\delta = \alpha\gamma$, где γ — бесконечно малая функция. Следовательно, имеем $\beta = \alpha - \delta$,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha - \delta}{\alpha} = \frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha} = 1 - \gamma \to 1.$$

2) Обратное утверждение доказывается аналогично.

Определение 3. *Пусть функция $g(x)$ не обращается в нуль на некотором окончании базы B.*

1. Если функция $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ финально ограничена (по базе B), то пишут

$$f(x) = O(g(x)) \quad (\text{по базе} \quad B).$$

Читается: f есть O большое от g по базе B. Или пишут так:

$$f(x) \ll g(x) \quad (\text{по базе} \quad B).$$

В случае, когда $f(x) \ll g(x) \ll f(x)$, говорят, что **функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок по базе B.**

2. Если функция $h(x)$ — бесконечно малая, то пишут $f(x) = o(g(x))$. Читается: f есть o малое от g.

3. Если существуют число $\delta > 0$ такое, что для любого окончания b базы B найдется $x \in b$ с условием $|h(x)| > \delta > 0$, то пишут

$$f(x) = \Omega(g(x)) \quad (\text{по базе} \quad B).$$

Читается: f есть омега от g (по базе B).

4. Функция $f(x) = O(x^m)$ при $x \to 0$ называется **бесконечно малой порядка** *m.*

Знаки $O(g)$, $o(g)$, $\Omega(g)$ предложены Э. Ландау, а знак $\ll$ ввел И. М. Виноградов.

Примеры. **1.** При $x \to \infty$

$$\frac{x+1}{x+2} = O(1).$$

2. При $x \to \infty$

$$\frac{\sin x}{x} = o(1), \quad \frac{\sin x}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{\sin x}{x} = \Omega\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. При $x \to 0+$ имеем $\sqrt{x} - x \sim \sqrt{x}$.
/vskip5mm
4. При $x \to +\infty$ имеем $\sqrt{x} - x \sim -x$.

Глава IV
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Лекция 12

§ 1. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной в точке** x_0, *если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

1) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\ x\colon\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\Big(\lim\limits_{x\to x_0} x\Big)$;

4) $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — *бесконечно малая функция при* $x \to x_0$, $\alpha(x_0) = 0$;

5) *для любого $\varepsilon > 0$ имеем: ε-окрестность точки $f(x_0)$ содержит образ (при отображении f) некоторой окрестности точки x_0.*

Эквивалентность этих определений следует из доказанных ранее теорем о пределах.

Определение 2. *Функция называется* **непрерывной справа**, *если*

$$f(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0);$$

непрерывной слева, *если*

$$f(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Утверждение 1. *Для того чтобы $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была одновременно непрерывна справа и слева.*

Доказательство. Необходимость. Если $f(x)$ непрерывна, то $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x: $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Но тогда при всех x: $-\delta < x - x_0 < 0$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $f(x)$ непрерывна слева. Непрерывность справа устанавливается аналогично.

Достаточность. Функция $f(x)$ непрерывна справа и слева при $x \to x_0$. Тогда

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0\ \forall\ x:\ 0<x-x_0<\delta_1\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon;$$
$$\exists\ \delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0\ \forall\ x:\ -\delta_2<x-x_0<0\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существет $\delta > 0$ такое, что при всех x: $|x - x_0| < \delta$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Утверждение доказано.

Пример. Пусть $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда функция

$$F(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n f(n) - f(x) \sum_{a<n\leq x} c_n$$

тоже непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$ (непрерывность в концевых точках отрезка понимается как непрерывность справа или слева).

Действительно, имеем: функция $F(x)$ непрерывна при $x = x_0$, где x_0 — нецелое число, поскольку в некоторой окрестности этой точки $G(x) = \sum\limits_{a<n\leq x} c_n f(n)$, $A(x) = \sum\limits_{a<n\leq x} c_n$ — постоянные. Пусть x_0 — целое число. Тогда

$$F(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} F(x) = \sum_{a<n\leq x_0} c_n f(n) - f(x_0) \sum_{a<n\leq x_0} c_n = F(x_0),$$
$$F(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} F(x) = \sum_{a<n\leq x_0-1} c_n f(n) - f(x_0) \sum_{a<n\leq x_0-1} c_n = F(x_0).$$

В силу предыдущего утверждения $F(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Свойства непрерывных функций вытекают из соответствующих свойств пределов.

Пусть f, g непрерывны в точке x_0. Тогда в точке x_0 имеем:

а) $c_1 f + c_2 g$ непрерывна для всех $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

б) fg непрерывна;

в) f/g непрерывна, если $g(x_0) \neq 0$;

г) если $f(x_0) \neq 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$f(x)f(x_0) > 0 \quad \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(т.е. $f(x)$ сохраняет знак);

д) $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

е) если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

§ 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Перечислим элементарные функции.

1. $P(x)$ — многочлен, $P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$.

2. Рациональная функция $f(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

3. Показательная функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4. Степенная функция $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

5. Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

6. Все тригонометрические функции.

7. Всевозможные суперпозиции всех этих функций.

Эти функции носят название элементарных потому, что только они рассматриваются в рамках элементарной математики. Описание их функциональных свойств существенным образом опирается на определение понятий показательной, степенной и логарифмической функций, а также на определения функций синус и косинус от вещественного аргумента. Следует сказать, что в элементарной математике свойства перечисленных функций устанавливаются, в основном, описательно, исходя из наглядных арифметических и геометрических соображений. В курсе математического анализа эти функции используются главным образом в качестве материала для применения общей теории, и мы могли бы оставаться на данной "наивной" точке зрения на них. Однако средства математического анализа позволяют дать вполне строгое определение всех основных элементарных функций. Для показательной, логарифмической и степенной функций это будет сделано нами сразу после изучения свойств монотонных функций. Несколько сложнее ситуация с тригонометрическими функциями, поскольку их определение должно опираться на понятие длины дуги окружности или на понятие степенного ряда, которые будут изучаться нами лишь во второй и третьей частях курса. Пока же, отвлекаясь от строгих определений и опираясь на основные функциональные свойства, мы докажем непрерывность показательной функции $y = a^x$ и функции $y = \sin x$.

Утверждение 1. *При любом $x_0 \in \mathbb{R}$ функция $y = a^x$ непрерывна.*

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x

с условием $|x - x_0| < \delta$ имеем $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$, или, что то же самое, $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon a^{-x_0} = \varepsilon_1$. Заметим, что можно ограничиться случаем $\varepsilon_1 < 1$. В качестве $\delta(\varepsilon)$ мы возьмем число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что из неравенства $|x - x_0| < \delta_1$ следует неравенство $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1$.

Далее положим $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1}{a+1}$.

Имеем $-\delta_1 < x - x_0 < \delta_1$. Так как $a > 1$, то

$$a^{-\delta_1} < a^{x-x_0} < a^{\delta_1},$$
$$a^{-\delta_1} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta_1} - 1.$$

Сначала докажем, что $a^{\delta_1} - 1 < \varepsilon_1$. Положим

$$N = \left[1/\delta_1\right] = \left[\frac{a+1}{\varepsilon_1}\right] \geq \left[\frac{a+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right] = \left[\frac{a}{\varepsilon_1}\right] + 1 > \frac{a}{\varepsilon_1}.$$

Тогда $1/\delta_1 \geq N$, т.е. $\delta_1 \leq 1/N$.

Так как

$$(1+\varepsilon_1)^N > 1 + \varepsilon_1 N > 1 + \varepsilon_1 \frac{a}{\varepsilon_1} > a,$$

то

$$1 + \varepsilon_1 > a^{1/N} \geq a^{\delta_1}.$$

Отсюда следует, что

$$a^{\delta_1} - 1 < \varepsilon_1, \quad a^{-\delta_1} > \frac{1}{1+\varepsilon_1} = 1 - \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} > 1 - \varepsilon_1.$$

Окончательно имеем

$$-\varepsilon_1 < a^{-\delta_1} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta_1} - 1 < \varepsilon_1,$$

следовательно,

$$|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1.$$

Тем самым доказана непрерывность $f(x) = a^x$ в точке x_0. Доказательство закончено.

Утверждение 2. *Функция* $f(x) = \sin x$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Вспомним, что $|\sin x| \leq |x|$. Имеем тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, и получим

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \quad \forall\ x:\ |x - x_0| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $f(x) = \sin x$ непрерывна. Эти утверждения можно записать так:

$$\sin x = \sin x_0 + \alpha(x), \quad a^x = a^{x_0} + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые функции.

При $x \to 0$, т.е. при $x_0 = 0$, имеют место более точные соотношения, которые называются замечательными пределами:

1) $\sin x / x \sim 1$,

2) $(e^x - 1)/x \sim 1$.

Эти пределы используются далее для изучения дифференциальных свойств элементарных функций.

Лекция 13

§ 3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Утверждение 1. *Имеют место соотношения:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Доказательство. а) Рассмотрим сначала случай $x\to+\infty$. В силу свойства монотонности показательной функции справедливы неравенства

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Но мы знаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

т. е. справедливы утверждения

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_1=N_1(\varepsilon):\ \forall\ n>N_1\ \Rightarrow\ \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon;$$

$$\exists\ N_2=N_2(\varepsilon):\ \forall\ n>N_2\ \Rightarrow\ \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon.$$

Тогда при $n>\max(N_1,N_2)$ имеем

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < e+\varepsilon;$$

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon.$$

Если $x > 1+\max(N_1,N_2) = N$, то $[x] > \max(N_1,N_2) = N-1$. Следовательно, при $x>N$ справедливы неравенства

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\varepsilon.$$

Таким образом, получим

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N:\ \forall\ x > N\ \Rightarrow\ \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим теперь случай $x \to -\infty$. Положим $y = -x$. Тогда, используя теорему 4 §6 гл. III о пределе сложной функции, будем иметь

$$e = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Соединяя вместе случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, приходим к соотношению

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Утверждение а) доказано.

б) Для доказательства соотношения $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ воспользуемся той же теоремой 4 §6 гл. III. Полагая $x = 1/y$, получим

$$e = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

в) Так как

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \to e \text{ при } x \to 0,$$

то из непрерывности и монотонности функции $y = e^x$ следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

г) Вновь воспользуемся теоремой о пределе сложной функции, полагая

$$g(x) = e^x - 1 \to 0 \text{ при } x \to 0,$$
$$f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y} \to 1 \text{ при } y \to 0,$$

и, кроме того, $f(0) = 1$.

Тогда имеем $f(g(x)) = \frac{x}{e^x-1} \to 1$ при $x \to 0$. Отсюда следует утверждение г).

Утверждение 1 полностью доказано.

Утверждение 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Доказательство. При $0<x<\pi/2$ рассмотрим сектор единичного круга, отвечающего дуге длины x, и два треугольника, один из которых вписан в сектор, а второй, прямоугольный, содержит его, имея с ним общий угол и сторону на оси абсцисс. Сравнивая площади этих фигур, имеем

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Отсюда получим

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Последние неравенства связывают четные функции, поэтому они имеют место при $0<|x|<\pi/2$. Так как $\cos x$ — непрерывная функция, то по теореме о переходе к пределу в неравенствах имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство закончено.

Примеры вычисления пределов.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\frac{e^{\alpha x+o(x)}-1}{x}=$$
$$=\frac{1+\alpha x+o(x)-1}{x}=\alpha+o(1)\to\alpha \text{ при } x\to 0.$$

Этот прием называется заменой бесконечно малой функции на эквивалентную ей.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{2\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)^2}{x^2}=\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}+o(1).$$

Таким образом:

1) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$ при $x\to 0$;

2) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$. Положим $x_n=\frac{x}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда по теореме о пределе сложной функции имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left((1+x_n)^{1/x_n}\right)^x=e^{x\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}}=e^x.$$

§ 4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной на множестве** A, *если она непрерывна во всякой точке $x \in A$.*

Если не все точки множества A входят в него с некоторой окрестностью, то это определение чуть-чуть меняется, например:

Определение 1а. *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной на отрезке** $I = [a, b]$, *если она непрерывна при всех x_0 с условием $a < x_0 < b$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.*

Определение 2. *Функция $f(x)$ на множестве A называется*

а) **неубывающей** ($f \uparrow$ на A), *если $f(a) \le f(b)$ при всех значениях $a, b \in A$, $a < b$;*

б) **невозрастающей** ($f \downarrow$ *на* A), *если $f(a) \ge f(b)$ при всех значениях $a, b \in A$, $a < b$;*

в) **(строго) возрастающей** ($f \uparrow\uparrow$), *если $f(a) < f(b)$ при всех значениях $a, b \in A$, $a < b$;*

г) **(строго) убывающей** ($f \downarrow\downarrow$), *если $f(a) > f(b)$ при всех значениях $a, b \in A$, $a < b$.*

Если $f(x)$ неубывающая, или невозрастающая, или возрастающая, или убывающая на A, то $f(x)$ называется **монотонной функцией** *на A.*

Определение 3. *Если в своей области определения функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то она называется* **разрывной** *в точке x_0. Точка x_0 называется* **точкой разрыва** $f(x)$.

Определение 4. *Точка x_0 называется* **точкой разрыва первого рода** *функции $f(x)$, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$. В противном случае точка разрыва функции $f(x)$ называется* **точкой разрыва второго рода**.

Примеры. 1. $y = \{x\}$ имеет разрывы первого рода в целых точках.

2. $y = \sin 1/x$ в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв второго рода. (Рассмотреть две последовательности $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $y_n = \frac{1}{\pi/2 + \pi n}$.)

Определение 5. *Разрыв первого рода в точке x_0 называется* **устранимым**, *если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, но $l \ne f(x_0)$.*

Этот разрыв устраняется, если по-новому определить (или, возможно, доопределить) $f(x)$ в точке $x = x_0$, положив $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Если $f(x) \to l$ при $x \to x_0$, но $f(x)$ не определена при $x = x_0$, то говорят также, что имеет место устранимый разрыв. В противном случае разрыв первого рода называется **неустранимым**.

Т е о р е м а 1 (о точках разрыва монотонной функции на отрезке). *Пусть функция $f(x)$ — монотонная на отрезке $[a,b]$. Тогда она может иметь на этом отрезке разрывы только первого рода. Более того, при всех $x_0 \in [a,b]$ имеем*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) = l_2,$$
$$l_2 \le f(x_0) \le l_1,$$

если $f(x)$ не убывает. Если же функция $f(x)$ не возрастает, то

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \sup_{x>x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \inf_{x<x_0} f(x) = l_2,$$
$$l_1 \le f(x_0) \le l_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим только один случай, когда функция $f(x)$ не убывает ($f \uparrow$) на $[a,b]$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Докажем теорему в этом случае:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x) = l_1.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) = l_2.$$

Так как l_1 — точная нижняя грань множества значений $f(x)$ при $x > x_0$, то:

1) $f(x) \ge l_1 \ \forall \ x > x_0$;

2) $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ x_1 > x_0$ такое, что $f(x_1) < l_1 + \varepsilon$.

В силу того, что $f(x)$ неубывающая функция, имеем

$$\forall x: \ x_0 < x \le x_1 \ \Rightarrow \ l_1 \le f(x) < l_1 + \varepsilon,$$

следовательно, $l_1 = \lim_{x\to x_0+} f(x)$. Имеем еще, что число $f(x_0)$ есть нижняя грань для $\{f(x)\}$ при $x > x_0$, откуда $f(x_0) \le l_1$.

Аналогично $f(x_0) \ge l_2$, откуда $l_2 \le f(x_0) \le l_1$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2 (критерий непрерывности монотонной функции). *Пусть $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$. Тогда для непрерывности ее на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы для любого $l \in [f(a), f(b)]$ нашлась точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = l$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим только случай неубывающей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Необходимость. Возьмем любое число $l \in [f(a), f(b)]$. Рассмотрим множество $X = \{x\} \subset [a, b]$, для которых $f(x) \geq l$, и пусть $x_0 = \inf X$. Тогда, поскольку $f(x)$ неубывающая функция, имеем

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) = l_1 \geq l.$$

При $x < x_0$ (если $x_0 \neq a$) $f(x) < l$. Отсюда

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = l_2 \leq l,$$

т.е. $l_2 \leq l \leq l_1$.
Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $l_2 = l_1 = f(x_0)$. Следовательно,

$$l = l_2 = l_1 = f(x_0).$$

Если же $x_0 = a$, то

$$f(a) \leq l < l_1,$$

но из непрерывности функции $f(x)$ в точке a слева следует, что $f(a) = l_1$, а значит, $l = f(a) = l_1$.

Достаточность. Будем рассуждать от противного. Пусть $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 и $f(x)$ не убывает на $[a, b]$. Тогда для значений $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ выполняются неравенства $l_2 < l_1$ и $l_2 \leq f(x_0) \leq l_1$.

Возьмем $l \in (l_2, l_1)$ и $l \neq f(x_0)$. Имеем:

$$\begin{aligned} l &> f(x) \text{ при } x < x_0, \\ l &< f(x) \text{ при } x > x_0, \\ l &\neq f(x) \text{ при } x = x_0, \end{aligned}$$

т.е. функция не принимает значение l на $[a, b]$. Таким образом мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

Т е о р е м а 3 (об обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует функция $x = g(y)$, строго возрастающая, определенная на отрезке $[f(a), f(b)]$ и непрерывная на нем, такая, что $g(f(x)) = x$,* т.е. $g = f^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Отображение $[a, b] \xrightarrow[f]{} [f(a), f(b)]$ инъективно, где $[a, b] = I_1$, $[f(a), f(b)] = I_2$, т.е. является вложением. Другими словами, для любых точек $x_1 \neq x_2$ имеем неравенство $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2. Отображение f сюръективно, т.е. является накрытием. Это имеет место по теореме 2, утверждающей, что для любого числа $l \in [f(a), f(b)]$ найдется точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = l$.

Следовательно, f есть биекция, т.е. f устанавливает взаимно однозначное соответствие между I_1 и I_2.

Тогда существует обратное отображение g, т.е. обратная функция $x = g(y)$.

1. Эта функция монотонно возрастает, так как если $y_1 > y_2$, то $g(y_1) = x_1$ и $g(y_2) = x_2$, причем $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$. Отсюда $x_1 > x_2$, поскольку $f(x)$ монотонно возрастает.

2. Эта функция $g(y)$ принимает все значения из $[a,b]$, так как для каждого x существует y такое, что $g(y) = x$, и этим y является число $f(x)$.

Отсюда в силу теоремы 2 имеем, что функция $g(y)$ непрерывна на отрезке I_2.

Теорема полностью доказана.

Используя доказанные выше теоремы о монотонных функциях, снова обратимся к изучению элементарных функций. Прежде всего, заметим, что при натуральном m функция $f(x) = x^m = \underbrace{x \dots x}_{m}$ является непрерывной и строго возрастающей при $x \geq 0$.

Действительно, если $a > b > 0$, то

$$a^m > a^{m-1}b > a^{m-2}b^2 > \cdots > ab^{m-1} > b^m.$$

Непрерывность же функции $f(x) = x^m$ следует из того, что она является произведением m непрерывных функций вида $y = x$.

По теореме 3 при всех $x \geq 0$ для нее существует обратная функция $g(x)$, которая тоже непрерывна и строго возрастает. Для нее, как известно из курса элементарной математики, используется обозначение $g(x) = \sqrt[m]{x}$ и она называется операцией извлечения корня m-й степени. Зафиксируем теперь число $x > 0$ и натуральное m и рассмотрим числа $y = \sqrt[m]{x}, z = \sqrt[m]{x^n}$. Тогда $y^m = x$, $y^{mn} = x^n$, $z^m = x^n$, откуда имеем $(y^n)^m = z^m$ и $y^n = z$, т.е. $\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{x^n}$. Это значит, что операция извлечения корня и возведения в целую степень перестановочны, и для числа z возможно использовать обозначения вида $z = x^{n/m}$ и $z^{-1} = x^{-n/m}$.

Пусть теперь $r = a/b$ и $r_1 = a_1/b_1$ рациональные числа, причем a, a_1 — целые числа, а b, b_1 —натуральные числа. Положим $d = x^{1/(bb_1)}$, будем иметь

$$x^r x^{r_1} = d^{ab_1} d^{a_1 b} = d^{ab_1 + a_1 b} = x^{\frac{ab_1 + a_1 b}{bb_1}} = x^{r+r_1}.$$

Аналогично, получим

$$(x^r)^{r_1} = \left(d^{ab_1}\right)^{\frac{a_1}{b_1}} = d^{aa_1} = x^{\frac{aa_1}{bb_1}} = x^{rr_1}.$$

Таким образом, для рациональной степени фиксированного числа x выполняются те же функциональные соотношения, что и для целой степени того же числа x.

Далее, используя прежние обозначения, допустим, что $r > r_1$ и $x > 1$. Тогда $d > 1$, $ab_1 > a_1 b$ и $d^{ab_1} > d^{a_1 b}$, $x^r > x^{r_1}$.

Следовательно, при возрастании рационального числа r при $x > 1$ значения x^r возрастают. Далее положим $x = e$. Ранее для любого натурального b нами были получены неравенства

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b < e < \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}.$$

Отсюда следует, что

$$e^{\frac{1}{b+1}} < 1+\frac{1}{b} < e^{\frac{1}{b}}.$$

Выполняя очевидные преобразования, получим

$$e^{\frac{1}{b+1}} < 1+\frac{1}{b} = \frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}, \quad e^{-\frac{1}{b+1}} > 1 - \frac{1}{b+1}.$$

Далее, пусть $|r| < 1$ и $r = m/n$. Тогда $|m| < n$. Применяя неравенство Бернулли, приходим к неравенству

$$(e^{\pm 1/n})^{|m|} \geq (1 \pm 1/n)^{|m|}, \quad e^{m/n} = e^r \geq 1 + r.$$

Отсюда в случае $0 < r < 1$ будем иметь

$$e^{-r} > 1 - r, \quad e^r < \frac{1}{1-r} = 1 + \frac{r}{1-r}.$$

Пусть теперь α — иррациональное число, и пусть рациональные числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенствам $r_1 < \alpha < r_2$. Тогда если $\{r_1\}$ — множество всех рациональных чисел, определяемых условием $r_1 < \alpha$, то соответствующее ему множество чисел $M_1 = \{e^{r_1}\}$ ограничено сверху числом e^{r_2}. Следовательно, существует число $\gamma_1 = \sup\limits_{r_1<\alpha} \{e^{r_1}\}$. В силу аналогичных соображений относительно множества $M_2 = \{e^{r_2}\}$ существует число $\gamma_2 = \inf\limits_{r_2>\alpha} \{e^{r_2}\}$.

Покажем, что на самом деле имеет место равенство $\gamma_1 = \gamma_2$. Для этого сначала заметим, что каждое из чисел e^{r_2} является верхней гранью множества M_1, в то время как γ_1 есть точная верхняя грань этого множества. Следовательно, для любого $r_2 > \alpha$ выполнено неравенство $\gamma_1 \leq e^{r_2}$. Это значит, что γ_1 есть нижняя грань множества M_2. Но так как γ_2 — это точная нижняя грань данного множества, то $\gamma_1 \leq \gamma_2$.

Выберем теперь некоторые значения r_1 и r_2 с условием

$$[\alpha] < r_1 < \alpha < r_2 < [\alpha] + 1.$$

Тогда справедливы неравенства

$$e^{r_1} \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq e^{r_2} \leq e^{[\alpha]+1},$$

$$0 \leq \gamma_2 - \gamma_1 \leq e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}(e^{r_2 - r_1} - 1) \leq e^{[\alpha]+1} \frac{r_2 - r_1}{1 - (r_2 - r_1)}.$$

Но поскольку число $\gamma_2 - \gamma_1$ — фиксировано, а число $r_2 - r_1 > 0$ может быть сколь угодно малым (например, в качестве r_1 и r_2 можно выбрать любые округления числа α с избытком и недостатком), то отсюда следует, что $\gamma_2 - \gamma_1 = 0$, т.е. $\gamma_2 = \gamma_1$. Указанную величину $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ мы возьмем в качестве значения степени e^α, т.е. мы по определению полагаем

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = e^\alpha.$$

Тем самым мы определили функцию $y = e^x$ для всех возможных вещественных значений x.

Осталось показать, что эта функция строго возрастает и удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

Прежде всего следует сказать, что из ее определения вытекает, что если $r_1 < \alpha < r_2$, где r_1 и r_2 — рациональные числа, то имеет место неравенство

$$e^{r_1} < e^\alpha < e^{r_2}.$$

Но тогда, если $\alpha < \beta$, то на интервале (α, β) найдется рациональное число r_3 такое, что имеет место неравенство

$$e^\alpha < e^{r_3} < e^\beta.$$

Таким образом, строгая монотонность функции $y = e^x$ установлена. Пусть теперь $\mu = \alpha + \beta$. Заметим, что если μ — рациональное число, то и в этом случае при рациональных r_1 и r_2 имеем

$$e^\mu = \sup_{r_1 < \mu} e^{r_1} = \inf_{r_2 > \mu} e^{r_2}.$$

Доказательство последнего равенства по существу повторяет рассуждения, проведенные нами выше для иррационального числа μ.

Представим теперь число r_1 в виде $r_1 = r_1' + r_1''$, где $r_1' < \alpha$ и $r_1'' < \beta$, а число r_2 — в виде $r_2 = r_2' + r_2''$, где $r_2' > \alpha$ и $r_2'' > \beta$.

Тогда будем иметь

$$e^{r_1} = e^{r_1'+r_1''} < e^{\alpha}e^{\beta} < e^{r_2'+r_2''} = e^{r_2}, \quad e^{r_1} < e^{\mu} < e^{r_2}.$$

Отсюда следует, что

$$h = |e^{\mu} - e^{\alpha}e^{\beta}| < e^{r_2} - e^{r_1}.$$

Но ранее мы уже показали, что данное неравенство при произвольных рациональных значениях r_1 и r_2 с условием $r_1 < \mu < r_2$ влечет за собой равенство $h = 0$. Другими словами, это означает, что

$$e^{\mu} = e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta},$$

и тем самым все требуемые свойства функции $y = e^x$, определенной ранее на всей вещественной оси, полностью доказаны.

Тогда у функции $f(x) = e^x$, отображающей вещественную ось $\mathbb{R}$ на луч $(0, +\infty)$, существует обратная функция $g(x)$, отображающая луч $(0, +\infty)$ на всю вещественную ось $\mathbb{R}$. Эта функция называется *натуральным логарифмом* и обозначается так: $g(x) = \ln x$. Она всюду непрерывна, строго возрастает и удовлетворяет условию: $x = e^{\ln x}$. Отсюда имеем

$$e^{\ln xy} = xy = e^{\ln x}e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}.$$

Поэтому справедливо равенство $\ln xy = \ln x + \ln y$. Тем самым установлено основное свойство функции $y = \ln x$.

Обратимся теперь к степенной функции $y = x^{\alpha}$, где $x > 0$. Для рациональных значений α ее свойства уже описаны при определении показательной функции. Если же α — иррациональное число, то тогда эту функцию мы можем определить равенством

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

В этом случае все ее элементарные свойства следуют из уже рассмотренных свойств показательной и логарифмической функций.

Здесь уместно снова подчеркнуть, что строгое обоснование свойств тригонометрических функций в этой части курса по указанным ранее причинам проводиться нами не будет.

В заключение рассмотрим несколько примеров на применение доказанных выше теорем.

Примеры. 1. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ — непрерывные на всей области их определения. Это утверждение является прямым следствием доказанных выше теорем.

2. Существует единственная функция $x = x(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$, удовлетворяющая *уравнению Кеплера*

$$x - \varepsilon \sin x = y \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Действительно: 1) функция $y(x)$ монотонно возрастает, так как при $x_1 > x_2$

$$y_1 - y_2 = x_1 - x_2 - \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_2) = x_1 - x_2 - 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$\left| 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq 2\varepsilon \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| = \varepsilon(x_1 - x_2),$$

$$y_1 - y_2 \geq (1 - \varepsilon)(x_1 - x_2) > 0;$$

2) $y(x) = x - \varepsilon \sin x$ — функция непрерывная.

По теореме 3 отсюда следует, что на любом отрезке $a \leq y \leq b$ существует единственная непрерывная функция $x(y)$, удовлетворяющая уравнению Кеплера.

Лекция 14

§ 5. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Теорема 1 (об обращении функции в нуль). *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ и на концах этого отрезка она принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует $c \in (a,b)$ такое, что*

$$f(c) = 0.$$

Доказательство проведем методом Больцано. Отрезок $J_0 = [a,b]$ разделим пополам точкой $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) = 0$, то все доказано. Если нет, то $f(x_1)$ имеет знак, отличный либо от $f(a)$, либо от $f(b)$. Обозначим через J_1 тот из двух отрезков $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков. Теперь разделим J_1 пополам точкой x_2 и выберем отрезок J_2 так, чтобы на концах его $f(x)$ имела значения разных знаков. Поступая так и далее, получим последовательность вложенных отрезков $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots$ Это последовательность стягивающихся отрезков, так как длина $J_n = \delta_n = \frac{\delta_0}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть x_0 — общая точка всех отрезков. Тогда если $J_n = [a_n, b_n]$, то $a_n \to x_0$ и $b_n \to x_0$ при $n \to \infty$, и отсюда

$$f(a_n) \to f(x_0) \text{ и } f(b_n) \to f(x_0) \text{ при } n \to \infty.$$

Так как $f(a_n)f(b_n) < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(x_0) \le 0$. Следовательно, $f(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (о промежуточном значении непрерывной функции). *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ и пусть c — любое число, удовлетворяющее условию*

$$\alpha \le c \le \beta, \text{ если } \alpha \le \beta,$$
$$\beta \le c \le \alpha, \text{ если } \beta \le \alpha.$$

Тогда существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = c$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - c$. Если $g(a)$ или $g(b) = 0$, то тогда $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если же $g(a)g(b) \ne 0$, то $g(a)$ и $g(b)$ имеют значения разных знаков. По теореме 1 существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $g(x_0) = 0$, откуда $f(x_0) = c$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 3 (об ограниченности непрерывной функции). ***Функция, непрерывная на*** $[a, b]$, ***ограничена на этом отрезке.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство методом Больцано. Предположим противное, т. е. пусть $f(x)$ не ограничена. Тогда разделим отрезок $J_0 = [a, b]$ пополам. В качестве J_1 выберем ту половину, где $f(x)$ не ограничена. Снова делим пополам J_1 и выбираем в качестве J_2 ту половину, на которой $f(x)$ не ограничена. Имеем $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset \ldots$. Получена последовательность стягивающихся отрезков. Пусть x_0 — их общая точка. В ней $f(x)$ непрерывна. Возьмем $\delta(1)$ — окрестность точки x_0, в которой $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Тогда

$$|f(x)| = |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|$$

и $f(x)$ ограничена в $\delta(1)$-окрестности точки x_0. Поскольку $\delta(1) > 0$, то в ней целиком содержится всякий отрезок J_n, если только его длина $\delta_n = \delta_0/2^n < \delta(1)$. Но тогда $f(x)$ будет ограничена и на J_n, что противоречит построению $\{J_n\}$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4 (о достижении непрерывной функцией точной верхней и нижней граней). ***Функция, непрерывная на отрезке, достигает своей точной верхней грани и точной нижней грани,*** т. е.

$$\exists\ x_1 \in [a, b] \text{ такое, что } \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1),$$
$$\exists\ x_2 \in [a, b] \text{ такое, что } \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Докажем теорему только для $\sup f(x)$, так как для случая $\inf f(x)$ можно рассмотреть функцию $f_1(x) = -f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного. Пусть $A = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $A \neq f(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда $A > f(x)$ для любого x. Но тогда $A - f(x)$ — непрерывная функция и $A - f(x) > 0$ при всех $x \in [a, b]$.

Следовательно, $g(x) = \frac{1}{A - f(x)}$ тоже непрерывна. Поэтому $g(x)$ ограничена по теореме 3 и, значит, найдется $B > 0$ такое, что

$$\frac{1}{A - f(x)} < B.$$

Отсюда

$$A - f(x) > \frac{1}{B}, \quad f(x) < A - \frac{1}{B},$$

т.е. число $A - \frac{1}{B}$ есть верхняя грань, которая меньше, чем A, но это противоречит тому, что A — наименьшая верхняя грань. Теорема доказана.

Так как для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке точная верхняя грань и точная нижняя грань достижимы, то $A = \sup f(x)$ называют максимальным значением $f(x)$, а $B = \inf f(x)$ — минимальным значением $f(x)$ и пишут

$$A = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad B = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Пример. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что выполняется равенство

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Действительно, пусть

$$m = \min\left(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\right), \quad M = \max\left(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\right).$$

Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$m \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = A \le M.$$

Следовательно, в силу теоремы 2 о промежуточном значении непрерывной функции отрезок $[m, M]$ принадлежит области значений функции $f(x)$, и потому существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = A$. Это и есть искомая точка.

Лекция 15

§ 6. ПОНЯТИЕ РАВНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Запишем определение функции, заданной на множестве X и непрерывной в точке $x_0 \in X$: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Вообще говоря, при фиксированных $\varepsilon > 0$ у каждой точки x_0 будет свое значение величины $\delta(\varepsilon)$, т.е. $\delta(\varepsilon)$ зависит от x_0 и это можно символически записать так:

$$\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, x_0).$$

Если оказалось, что для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $x_0 \in X$ величина $\delta(\varepsilon)$ не зависит от x_0, то функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X.

Запишем это определение более четко в эквивалентной форме.

Определение. *Функция $f(x)$ называется* **равномерно непрерывной** *на X, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такое, что}$$
$$\forall\ x_1, x_2 \in X :\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема (теорема Гейне – Кантора). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. (От противного). Пусть $f(x)$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной на $[a, b]$. Тогда

$$\exists\ \varepsilon > 0 :\ \forall\ \delta > 0 :\ \exists\ \alpha, \beta \in X :\ |\alpha - \beta| < \delta \text{ и } |f(\alpha) - f(\beta)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность $\delta = \delta_n = 1/n$. Каждому n тогда соответствует пара точек α_n, β_n такая, что

$$|\alpha_n - \beta_n| < 1/n, \quad |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon.$$

Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются ограниченными. По теореме Больцано–Вейерштрасса из α_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$, т.е. $\alpha_{n_k} \to x_0 \in X$ при $k \to \infty$. Далее,

$$|\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}| < 1/n_k,$$

следовательно, $\gamma_{n_k} = \alpha_{n_k} - \beta_{n_k}$ есть бесконечно малая последовательность и $\beta_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$. Но тогда $y_k = f(\alpha_{n_k}) \to f(x_0)$, $z_k = f(\beta_{n_k}) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$, т.е. $t_k = |y_k - z_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Но это противоречит тому, что

$$t_k = |y_k - z_k| \geq \varepsilon,$$

так как, переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $0 \geq \varepsilon$, что неверно. Доказательство закончено.

Доказательство теоремы Кантора проходит аналогично и для множества X, которое не обязательно является отрезком. Достаточно, чтобы множество X было ограниченным и содержало все свои предельные точки.

§ 7. СВОЙСТВА ЗАМКНУТЫХ И ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ. КОМПАКТ. ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНЫЕ НА КОМПАКТЕ

Определение 1. *Множество точек (на вещественной прямой) называется* **замкнутым**, *если оно содержит все свои предельные точки.*

Напомним, что x_0 — предельная точка множества A, если во всякой окрестности точки x_0 находится бесконечно много точек, принадлежащих A (а сама точка x_0 может принадлежать или не принадлежать A).

Определение 2. *Множество называется* **открытым**, *если каждая его точка содержится в ее δ-окрестности, целиком состоящей из точек этого множества.*

Пример. Интервал — открытое множество, а отрезок — замкнутое множество.

Определение 3. *Ограниченное замкнутое множество (на вещественной прямой) называется* **компактом**.

Утверждение 1. а) *Если A — замкнутое множество, то $A_1 = \mathbb{R} \backslash A$ открыто.*

б) Если B открыто, то $B_1 = \mathbb{R} \backslash B$ замкнуто.

Доказательство. а) *(От противного).* Если существует $\alpha \in A_1$, у которой нет окрестности, целиком состоящей из точек множества A_1, то во всякой δ-окрестности точки α есть хотя бы одна точка из A, отличная от α, а следовательно, и бесконечно много точек из A. Но тогда α есть предельная точка множества A, и ввиду замкнутости A имеем, что $\alpha \in A$, но $\alpha \in A_1$. Имеет место противоречие.

б) Пусть β — предельная точка для B_1 и $\beta \in B$. Тогда в любой ее окрестности есть точки B_1, а это противоречит тому, что у любой точки множества B есть окрестность, состоящая из одних только точек множества B. Это значит, что $\beta \notin B$, т.е. $\beta \in B_1$, следовательно, B_1 замкнуто, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. а) *Любое объединение открытых множеств открыто, конечное пересечение открытых множеств — тоже открытое множество.*

б) Любое пересечение замкнутых множеств замкнуто, конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство. Пусть $a \in \bigcup_\alpha A_\alpha$. Тогда существует номер α_0 такой, что $a \in A_{\alpha_0}$, и существует δ-окрестность точки a, целиком принадлежащая A_α. Обозначим ее $O_\delta(a)$. Тогда $O_\delta(a) \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$, т.е. $\bigcup_\alpha A_\alpha$ открыто. Пусть теперь $a \in \bigcap_{k=1}^n A_k$. Тогда $\exists\ O_{\delta_m}(a) \subset A_m\ \forall\ m$ и при $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ имеем

$$O_\delta(a) = \bigcap_{k=1}^n O_{\delta_k}(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k.$$

Таким образом, утверждение а) доказано, а утверждение б) следует из утверждения 1 б), что и требовалось доказать.

Определение 4. *Пусть заданы множество A и система множеств $\{B\}$. Будем говорить, что B есть* **покрытие** *A, если для любого $\alpha \in A$ существует $B \in \{B\}$ такое, что $\alpha \in B$.*

Следующее утверждение обычно берут за определение компакта.

Утверждение 3 (лемма Бореля). *Из любого покрытия компакта открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. От противного. Пусть A — компакт, тогда $\exists$ отрезок J_0, такой, что $A \subset J_0$ (поскольку A ограничено). Делением отрезка пополам строим систему стягивающихся отрезков $J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_k \supset \ldots$ с условием, что множества $A \cap J_k$ не допускают конечного покрытия для любого k. Пусть x_0 — их общая точка.

Поскольку $J_k \cap A$ не допускает конечного покрытия, в каждом отрезке J_k есть точки из A. Это значит, что точка $x_0 \in A$, так как A замкнуто. Всякая точка множества A покрыта некоторым множеством из системы множеств $\{B\}$, т.е. существует множество B такое, что $x_0 \in B$. Далее, существует номер k такой, что $J_k \subset B$, поскольку длина $J_k \to 0$, а B открыто. Тем самым B покрывает J_k и $A \cap J_k$ допускает конечное покрытие. Противоречие. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1(обобщение теоремы Гейне – Кантора). *Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. Каждую точку $x_0 \in K$ накроем δ'-окрестностью радиуса $\delta' = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right)$, где $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right) = \delta$ определяется из условия, что для любого $x \in K$ с условием $|x - x_0| < \delta$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Каждая такая δ'-окрестность — это открытое множество. По лемме Бореля выберем конечное подпокрытие для K. Пусть оно состоит из интервалов $J_1, \ldots, J_k$ с длинами соответственно $\delta_1, \ldots, \delta_k$ и центрами $a_1, \ldots, a_k$. Положим $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \ldots, \delta_k)$. Если теперь x_1 и x_2 таковы, что $|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon)$, тогда при некотором $a = a_s$ имеем, что точка x_1 принадлежит $\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$-окрестности точки a, т.е. $|x_1 - a| < \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$. Но $\delta(\varepsilon) \le \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$, поэтому

$$|x_2 - a| = |(x_2 - x_1) + (x_1 - a)| \le |x_2 - x_1| + |x_1 - a| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right).$$

Отсюда $|f(x_2) - f(a)| < \varepsilon/2$. Но так как $|f(x_1) - f(a)| < \varepsilon/2$, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - f(a)) + (f(a) - f(x_1))| \le$$
$$\le |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(a)| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $f(x)$ равномерно непрерывна на K. Доказательство закончено.

Примеры. 1. Функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна при $x > 1$. Действительно, для любых $x_1, x_2 > 1$ имеем неравенство

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \le \frac{|x_1 - x_2|}{2}\left(< \frac{\delta}{2} = \varepsilon\right).$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ получим, что при $\delta = 2\varepsilon$

$$\forall\ x_1, x_2 \in (1, +\infty): \ |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow \ |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

2. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, поскольку при $\varepsilon = 1$ справедливо неравенство для разности

$$y(n + \frac{1}{n}) - y(n) = (n + \frac{1}{n})^2 - (n)^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 1 = \varepsilon$$

при всех натуральных n, а это означает, что не существует числа $\delta(1) > 0$ такого, что для любых двух точек, находящихся на расстоянии меньшем $\delta(1)$, модуль разности значений функции x^2 в этих точках был меньше 1.

Ради полноты приведем позитивную формулировку свойства функции $f(x)$ не быть равномерно непрерывной на множестве A.

Определение 5. ***Функция $f(x)$*** **не является равномерно непрерывной на множестве** A, *если можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при всяком $\delta > 0$ найдутся числа $a_1 = a_1(\delta) \in A$ и $a_2 = a_2(\delta) \in A$ с условием $|a_1 - a_2| < \delta$, для которых*

$$|f(a_1) - f(a_2)| \geq \varepsilon.$$

Замечания. 1. В данном определении вместо всех $\delta > 0$ достаточно ограничиться только числами δ вида $\delta = \delta_n = 1/n$.

2. Непрерывность функции в некоторой точке x_0 предполагает, что функция $f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности этой точки. Доказанная выше теорема 1 справедлива в несколько более общей ситуации. Приведём соответствующее определение.

Определение 6. ***Функция $f(x)$**, определенная на множестве A, называется* **непрерывной в точке x_0 относительно данного множества** A, *если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при всех $x \in A$ с условием $|x - x_0| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

С учетом сделанных ранее замечаний, данное определение непрерывности можно записать через предел функции по некоторой базе.

Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, остаются полностью справедливыми и в том случае, когда условие непрерывности функции в точке заменяется на сформулированное выше определение непрерывности относительно множества A, если только множество $A = K$ является компактом.

Глава V
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Лекция 16

§ 1. ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Свойство функции $f(x)$ быть непрерывной в точке $x = a$ равносильно тому, что разность $\alpha(x) = f(x) - f(a)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Другими словами, это означает, что

$$f(x) = f(a) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Таким образом, для всякой непрерывной функции в точке $x = a$ имеет смысл рассматривать аналитическое выражение (т.е. формулу)

$$\alpha(x) = f(x) - f(a).$$

Это выражение называется **приращением функции** $f(x)$ в точке $x = a$. Оно обозначается так: $\alpha(x) = \Delta f(x)$. Данное обозначение используется даже и в том случае, когда $f(x)$ не является непрерывной функцией в точке $x = a$.

Итак, если $\Delta f(x) \to 0$ при $x \to a$, то функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = a$, и наоборот. Для простейшей функции $f(x) = x$ ее приращение $\alpha(x) = x - a$ называется **приращением аргумента,** поскольку при $f(x) = x$ значение функции $f(x)$ равно значению аргумента. Это выражение имеет специальное обозначение: $\alpha(x) = \Delta x$. Имеем, что $\Delta x \to 0$ при $x \to a$.

Аргумент x можно выразить через его приращение Δx. Действительно, $x = a + (x - a) = a + \Delta x$. Следовательно, при фиксированном a приращение $\Delta f(x)$ можно рассматривать как некоторую функцию от Δx, т.е.

$$\alpha(x) = \Delta f(x) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \beta(\Delta x).$$

Когда хотят подчеркнуть, что значение $\Delta f(x)$ равно A при $x = a$ и $\Delta x = b$, то пишут

$$\Delta_b f(a) = A \text{ или } \Delta f(x)\big|_{\substack{x=a\\ \Delta x=b}} = A.$$

Пример. Если $f(x) = x^2$, $x = 1$, $\Delta x = 2$, то

$$\Delta(x^2)\big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=2}} = \left((x+\Delta x)^2 - x^2\right)\big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=2}} = 9 - 1 = 8.$$

Теперь рассмотрим более подробно приращение $\Delta f(x)$ как функцию от приращения аргумента Δx. Очень важным для построения всего курса математического анализа является случай, когда $\Delta f(x)$ бесконечно мала и при этом еще и эквивалентна линейной функции вида $c\Delta x$, где c — некоторая вещественная постоянная. В этом случае говорят, что приращение $\Delta f(x)$ имеет линейную часть, называемую **дифференциалом функции** $f(x)$ **в точке** $x = a$, а функция $f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** $x = a$.

Другими словами, мы приходим к следующему определению. Пусть $f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности точки $x = a$.

Определение 1. *Линейная функция $g(\Delta x) = c\Delta x$ называется* **дифференциалом приращения** $\Delta f(x)$ (*или* **дифференциалом самой функции** $f(x)$ **в точке** $x = a$), *если*

$$\Delta f(x) \sim c\Delta x \text{ при } \Delta x \to 0,$$

т.е.

$$\Delta f(x) = c\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x,$$

где $c \in \mathbb{R}$ и $\gamma(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференциал функции $f(x)$ обозначается $df(x)$ или просто df. Из определения вытекает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = c.$$

Если при этом $c \neq 0$, то

$$\frac{\Delta f}{df} \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Отметим, что функция $\gamma(\Delta x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$, функция $\Delta f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности этой точки, а функция $df(x) = c\Delta x$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$. Нам удобно будет доопределить функцию $\gamma(\Delta x)$, полагая $\gamma(0) = 0$. В результате в равенстве

$$\Delta f(x) = df(x) + \gamma(\Delta x)\Delta x,$$

определяющем дифференциал $df(x)$, все участвующие функции будут определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $\Delta x = 0$.

Далее, легко видеть, что $\Delta x = dx$.

Определение 2. *Число* $c = \frac{df(x)}{dx}$ *называется* **производной функции** $f(x)$ *в точке* $x = a$. *Для производной используются следующие общепринятые обозначения:*

$$c = f'(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = Df(x)|_{x=a}.$$

Если $df(x)$ существует, то, исходя из определений 1 и 2, мы также можем написать

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c,$$

т.е.

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a) \text{ при } x \to a.$$

Введенные выше понятия дифференциала и производной функции имеют не только глубокий аналитический смысл, но вполне определенный физический, точнее, механический, а также геометрический смысл.

Введем понятие касательной к кривой в данной точке.

Определение 3. Касательная, *точнее,* **наклонная касательная** *к кривой* $y = f(x)$ *в точке координатной плоскости с координатами* $x = a$, $y = f(a)$ *— это такая прямая, которая проходит через точку* $(a, f(a))$, *и ее угловой коэффициент* k, *т.е. тангенс угла ее наклона, равен пределу углового коэффициента* $k(\Delta x)$ *"секущей" прямой, проходящей через точки* $(a, f(a))$ *и* $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ *при* $\Delta x \to 0$.

Поэтому говорят, что касательная — это предельное положение секущей.

Геометрический смысл производной раскрывается следующим ее свойством: число $f'(a)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$, на координатной плоскости xOy в точке $(a, f(a))$.

Механическая интерпретация. Если t — текущее время; $s(t)$ — путь, пройденный телом за отрезок времени $t - t_0$, где t_0 — начало отсчета, то

$$\Delta s(t)\,|_{t=a}$$

есть путь, пройденный телом за время от $t = a$ до $t = a + \Delta t$, т.е.

$$\Delta s(t) = s(a + \Delta t) - s(a).$$

Отношение

$$\left.\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}\right|_{t=a}$$

есть средняя скорость на отрезке времени $[a, a + \Delta t]$, а предел этой скорости при $\Delta t \to 0$ — мгновенная скорость тела в момент времени $t = a$. Именно эту величину показывает спидометр автомобиля при его движении.