Лекция 25

§ 15. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Определение 1. *Точку x_0 из интервала (a,b) будем называть* **точкой перегиба** *дифференцируемой функции $f(x)$ (или ее графика), если существует проколотая δ-окрестность точки x_0 такая, что и в правой, и в левой ее полуокрестностях функция $f(x)$ имеет выпуклый график, но направление выпуклости справа и слева разное.*

Лемма 1. *Если x_0 — точка перегиба функции $f(x)$ и $f'(x)$ существует на (a,b), то в некоторой δ-окрестности точки x_0 разность*

$$r(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

является неубывающей или невозрастающей функцией в точке x_0 (в зависимости от изменения направления выпуклости).

Доказательство. Возьмем проколотую δ-окрестность точки x_0, в правой и левой частях которой $f(x)$ имеет разные направления выпуклости. Пусть для определенности при $x_0 - \delta < x < x_0$ функция $f(x)$ выпукла вверх, а при $x_0 < x < x_0 + \delta$ — выпукла вниз.

Надо доказать, что $r(x) \geq 0$ при всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ и $r(x) \leq 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Рассмотрим сначала первый случай. Имеем

$$r(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0)(x - x_0).$$

К разности $f(x) - f(x_0)$ применим теорему Лагранжа. Тогда при некотором $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$ будем иметь

$$r(x) = f'(x_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(x_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

По теореме 5 на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ функция $f'(x)$ непрерывна и не убывает. Точно так же доказывается, что $f'(x)$ не убывает и непрерывна на $(x_0 - \delta, x_0)$. Но так как производная не может иметь разрывов первого рода, а монотонная функция не может иметь разрывов второго рода, то $f'(x)$ непрерывна и в точке x_0. Далее, в силу того, что $f'(x)$ не убывает в проколотой окрестности точки x_0 и на основании ее непрерывности в этой точке имеем, что и в точке x_0 она тоже не убывает. Но тогда $f'(x_1) - f'(x_0) \geq 0$, откуда

$$r(x) = (f'(x_1) - f'(x_0))(x - x_0) \geq 0.$$

Случай $x < x_0$ разбирается совершенно аналогично. Лемма 1 доказана.

Т е о р е м а 1 (необходимое условие перегиба). *Если $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет вторую производную и точка x_0 — точка перегиба, то*

$$f''(x_0) = 0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (От противного). Допустим, что $f''(x_0) \neq 0$. Легко видеть, что $r''(x) = f''(x)$. Поэтому

$$r''(x_0) = f''(x_0) \neq 0.$$

Но поскольку

$$r'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

то по второму достаточному признаку экстремума функция $r(x)$ имеет строгий локальный экстремум. Это противоречит утверждению леммы, по которому $r(x)$ не убывает или $r(x)$ не возрастает.

Отсюда следует, что $f''(x_0) = 0$. Теорема 1 доказана.

Далее будем говорить о точках перегиба только в строгом смысле, имея в виду, что в определении точки перегиба имеет место строгая выпуклость в обеих полуокрестностях.

Т е о р е м а 2 (первое достаточное условие строгого перегиба). *Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки $x = x_0$ и $f''(x)$ имеет в ней разные знаки при $x < x_0$ и $x > x_0$.*

Тогда, если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, то x_0 — точка строгого перегиба графика функции $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f''(x)$ сохраняет знак при $x < x_0$ и $x > x_0$ в некоторой проколотой δ-окрестности, то $f(x)$ имеет разные направления строгой выпуклости в этих частях δ-окрестности. По определению это означает, что x_0 — точка строгого перегиба. Теорема 2 доказана.

Эту теорему можно сформулировать так: *если $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ строго возрастает в точке x_0, то x_0 — точка строгого перегиба (то же и в случае $f''(x_0) = 0$, $f''(x)$ строго убывает).*

Т е о р е м а 3 (второе достаточное условие строгого перегиба). *Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b), $f''(x_0) = 0$ и существует $f'''(x_0) \neq 0$.*

Тогда x_0 — точка строгого перегиба.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, то либо $f^{(3)}(x_0) > 0$, либо $f^{(3)}(x_0) < 0$. В первом случае имеем $f''(x)$ строго возрастает в точке x_0, а во втором — $f''(x)$ строго убывает в точке x_0. Поэтому из теоремы 2 в обоих случаях следует, что x_0 — точка строгого перегиба. Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 (третье достаточное условие строгого перегиба). *Пусть $x_0 \in (a,b)$ и пусть $f(x)$ дифференцируема $2k$ раз на $[a,b]$. Пусть существует $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$ и $f^{(2)}(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(2k)}(x_0) = 0$. Тогда x_0 — точка строгого перегиба.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что x_0 в силу условия $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$ является точкой возрастания или убывания для $f^{(2k)}(x)$. Рассмотрим проколотую δ-окрестность U точки x_0, в которой $f^{(2k)}(x)$ меняет знак при переходе через x_0 и сохраняет знак внутри каждой из двух ее полуокрестностей.

Далее можно считать, что $k \geq 2$, так как при $k = 1$ теорема 4 следует из теоремы 3. Пусть $x \in U$. По формуле Тейлора имеем

$$f^{(2)}(x)=f^{(2)}(x_0)+\ldots+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-3)!}(x-x_0)^{2k-3}+\frac{f^{(2k)}(c)}{(2k-2)!}(x-x_0)^{2k-2}=$$
$$=\frac{f^{(2k)}(c)}{(2k-2)!}(x-x_0)^{2k-2},$$

где $c = c(x) \in U$ и $(x - x_0)c(x) > 0$. Но $(x - x_0)^{2k-2}$ сохраняет знак при $x \in U$, а $f^{(2k)}(c)$ меняет знак. Поэтому и $f^{(2)}(x)$ меняет знак, следовательно, по теореме 2 точка x_0 — точка строгого перегиба. Теорема 4 доказана.

Примеры. 1. $y = x^3$: точка 0 — точка перегиба (строгого).

2. $y = x^{2k+1}$: точка 0 — точка перегиба (строгого).

Определение 2. *Прямая $x = a$ на плоскости xOy называется* **вертикальной асимптотой** *функции $f(x)$, если один из пределов*

$$\lim_{x\to a-} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a+} f(x)$$

равен $\pm\infty$.

Пример. $y = 1/x$. Здесь прямая $x = 0$ — это вертикальная асимптота.

Определение 3. *Прямая $y = kx + b$ называется* **наклонной асимптотой** *функции $f(x)$ (или, точнее, графика функции $y = f(x)$) при $x \to +\infty$, если*

$$\alpha(x) = f(x) - kx - b \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$.

Т е о р е м а 5. *Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ у функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при $x \to +\infty$ (одновременно) выполнялись два условия:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $k \in \mathbb{R}$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$, $b \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — асимптота, тогда

$$\alpha(x) = f(x) - kx - b \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\frac{f(x) - kx - b}{x} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

откуда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} ((f(x) - kx - b) + b) = b.$$

Тем самым первая часть теоремы доказана.

Достаточность. Так как $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x\to\infty} ((f(x) - kx) - b) = b - b = 0.$$

Теорема доказана полностью.

Если для функции $f(x)$ выполнено условие 1 теоремы 5, то мы будем говорить, что прямая $y = kx$ задает **асимптотическое направление.**

Пример нахождения наклонных асимптот в случае функции, заданной неявно.

Рассмотрим уравнение кривой

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Зададим ее параметризацию, полагая $y = tx$. Тогда получим

$$x^3(1 + t^3) - 3ax^2t = 0,$$

$$1 + t^3 - \frac{3at}{x} = 0, \quad x = \frac{3at}{1 + t^3}.$$

Отсюда имеем: $\frac{y}{x} = t = t(x)$ — ограниченная величина при $x \to \infty$ и $t(x) \to -1$. Следовательно, $t = -1$, т.е. прямая $y = -x$ задает асимптотическое направление. Найдем теперь значение параметра b в уравнении касательной $y = -x + b$. Имеем

$$y = -x + b + o(1),$$
$$x^3 + (-x+b)^3 - 3ax(-x+b) = o(x^2),$$

откуда

$$3x^2(b+a) + 3x(ab - b^2) + b^3 = o(x^2),$$
$$b + a + \frac{ab - b^2}{x} + \frac{b^3}{3x^2} = o(1).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $x \to \infty$ для постоянного b, получим равенство $b + a = 0$, откуда $b = -a$, и, следовательно, искомое уравнение асимптоты при $x \to \infty$ имеет вид $y = -x - a$.

Краевой экстремум. Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.

Определение 4. *Точка a называется* **точкой краевого локального максимума (минимума)**, *если существует интервал $(a, a+\delta) \in [a, b]$, для всех точек x которого справедливо неравенство*

$$f(a) > f(x) \quad (\textit{соответственно } f(x) > f(a)).$$

При $f(a) \geq f(x)$ имеет место несобственный (локальный) максимум; при $f(a) \leq f(x)$ — несобственный (локальный) минимум.

То же самое можно определить и для точки b, только интервал $(a, a+\delta)$ надо заменить на интервал $(b-\delta, b)$.

Краевые максимум и минимум называются **краевыми экстремумами.**

Лемма 2. *Для существования (собственного) краевого экстремума в точке a (или b) достаточно, чтобы в этой точке существовала отличная от нуля односторонняя производная функции $f(x)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы Дарбу.

Например, если $f'(x) > 0$ при $x \in (a, a+\delta)$, то a — краевой минимум, поскольку при $x \in (a, a+\delta)$ существует $c \in (a, a+\delta)$ такое, что

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) > 0, \quad \text{т.е.} \quad f(x) > f(a).$$

Лемма 2 доказана.

Общая схема построения графика функции $f(x)$

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Учесть особенности функции (четность, периодичность, знакопеременность). Найти пересечения графика с осями координат.

3. Отметить значения функции на границе области определения и в точках разрыва. Найти вертикальные асимптоты.

4. Найти наклонные асимптоты.

5. Определить участки монотонности. Определить локальные и краевые экстремумы.

6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.

7. Отобразить перечисленные особенности функции при построении ее графика.

Лекция 26

§ 16. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Целью интерполирования, или интерполяции, является приближенное нахождение функции по известным значениям этой функции и ее производных в некоторых заданных точках области ее определения. Эта задача становится определенной, если задан вид функции и число неизвестных параметров не превышает количества заданных значений функции и ее производных. Так, например, многочлен n-й степени имеет $n+1$ параметров (его коэффициенты) и может быть определен по значениям его в $n+1$ различных точках.

Пусть в точках $x_1, \ldots, x_n$ многочлен $P(x)$ принимает соответственно значения $f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Теорема 1. *Существует единственный многочлен $P(x)$ степени $n-1$ такой, что $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Имеем

$$Q_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_k, \\ 0, & \text{если } x = x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \end{cases}$$

где

$$Q_k(x) = \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

Тогда $P(x)$ можно записать в виде

$$P(x) = f(x_1)Q_1(x) + \cdots + f(x_n)Q_n(x).$$

Докажем, что многочлен $P(x)$ единственен. Действительно, допустим, что существует еще один многочлен с указанными свойствами, т.е. $Q(x_k) = f(x_k)$.

Отсюда получим, что многочлен $(n-1)$-й степени

$$F(x) = P(x) - Q(x)$$

имеет n корней, а именно, $F(x_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $F(x) \equiv 0$, т.е. многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно совпадают. Теорема 1 доказана.

Формула, задающая многочлен $P(x)$, называется **интерполяционной формулой Лагранжа.** При этом точки $x_1, \ldots, x_n$ называют **узлами интерполяции.**

Пусть $f(x)$ — некоторая функция. Обозначим через $P_k(x)$ многочлен степени $k-1$, принимающий в точках $x_1, \dots, x_k$ значения $f(x_1), \dots, f(x_k)$. Тогда интерполяционную формулу можно записать в виде

$$P(x) = P_1(x) + \sum_{k=2}^{n}(P_k(x) - P_{k-1}(x)) = P_n(x).$$

Многочлен $P_k(x) - P_{k-1}(x)$ степени $k-1$ в силу определения обращается в нуль в точках $x_1, \dots, x_{k-1}$. Следовательно, он имеет вид $A_k(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})$. Коэффициент A_k совпадает со старшим коэффициентом многочлена $P_k(x)$ и в силу интерполяционной формулы Лагранжа равен

$$A_k = \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_k)} +$$

$$+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_k)} + \dots + \frac{f(x_k)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})}.$$

Таким образом, коэффициент A_k является некоторой функцией от $x_1, \dots, x_k$. Обозначим ее через $A_k = f_k(x_1, \dots, x_k)$. Тогда интерполяционный многочлен $P(x)$ можно записать так:

$$P(x) = f_1(x_1) + (x-x_1)f_2(x_1,x_2) + \dots + (x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f_n(x_1, \dots, x_n),$$

где, очевидно, полагая $x = x_1$, имеем $f_1(x_1) = f(x_1)$. Эта формула называется **интерполяционной формулой Ньютона. Функции** $f_k(x_1, \dots, x_k)$, $k = 1, \dots, n$, называются **интерполирующими функциями.**

Полагая в формуле Ньютона $x = x_n$, получаем

$$f(x_n) = P(x_n) = f(x_1) + (x_n - x_1)f_2(x_1, x_2) + \dots$$

$$+(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})f_n(x_1, \dots, x_n).$$

Здесь узел интерполяции x_n — произвольное число, поэтому, заменяя x_n на x, будем иметь

$$f(x) = f(x_1) + (x-x_1)f_2(x_1,x_2) + \dots + (x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f_n(x_1, \dots, x).$$

Уменьшим количество узлов интерполяции на один, исключив точку x_{n-1}, запишем эту формулу для узлов интерполяции $x_1, \dots, x_{n-2}, x$ и вычтем получившееся тождество из предыдущего. Тогда получим

$$f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \frac{f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, x) - f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}{x - x_{n-1}}.$$

Таким образом, при $n = 2, 3, \ldots$ имеют место соотношения

$$f_2(x_1, x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f_3(x_1, x_2, x) = \frac{f_2(x_1, x) - f_2(x_1, x_2)}{x_1 - x_2},$$

которые позволяют с помощью простого алгоритма вычислить интерполирующие функции. Для определения всех коэффициентов интерполяционного многочлена Ньютона $(n-1)$-й степени достаточно вычислить значения интерполирующих функций в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках (с учетом кратности). Здесь существенно, что при добавлении новой точки интерполяции интерполирующие функции, вычисленные ранее, сохраняются и надо только добавить к ним значения интерполирующих функций в этой точке.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет n-ю производную на отрезке $[a, b]$, $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$. Тогда имеет место формула*

$$f(b) = P_n(b) + R(b),$$

где

$$R(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b - x_1) \ldots (b - x_n),$$

причем c — некоторая точка, принадлежащая (a, b).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$R(x) = f(x) - P_n(x) - (x - x_1) \ldots (x - x_n)H,$$

где H — некоторое число, значение которого мы выберем ниже. Имеем

$$R(x_1) = \cdots = R(x_n) = 0.$$

Величину H найдем из соотношения $R(b) = 0$. Отсюда по теореме Ролля, примененной n раз, получим, что существует число $c \in (a, b)$, для которого $R^{(n)}(c) = 0$, откуда

$$f^{(n)}(c) - n!H = 0.$$

Следовательно,

$$H = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Теорема 2 доказана.

Лекция 27

§ 17. МЕТОД ХОРД И МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ (МЕТОД НЬЮТОНА). БЫСТРЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и по теореме Коши о промежуточном значении для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, лежащего между числами $f(a)$ и $f(b)$, внутри отрезка $[a, b]$ найдется точка c такая, что $f(c) = \alpha$. Естественной и важной задачей и в теоретическом, и в практическом смысле является задача вычисления приближенного значения числа c с наперед заданной точностью. Например, можно поставить вопрос о нахождении корня уравнения $x^2 = 2$ с точностью до десяти знаков после запятой, т.е. для $\sqrt{2}$ найти приближенное значение c_0 такое, чтобы имело место неравенство $|\sqrt{2} - c_0| < 10^{-10}$ и т.п.

Рассмотрим два естественных метода нахождения таких приближенных значений, а именно: метод хорд и метод касательных, который еще называют методом Ньютона, поскольку Ньютон первым его применил. Эти методы важны не столько сами по себе, сколько тем, что они являются простейшей моделью многих вычислительных процессов, применяемых в гораздо более сложных ситуациях. Оба метода итерационные, т.е. они состоят в последовательном вычислении некоторых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. При этом разность $|c - x_n| \to 0$ при $n \to \infty$, и поэтому , начиная с некоторого номера n_0, она должна стать меньше наперед заданного значения, называемого заданной точностью или погрешностью вычисления.

Метод хорд. Число x_1 определим как абсциссу точки пересечения горизонтальной прямой $y = \alpha$ с "хордой" графика функции $y = f(x)$, т.е. с отрезком, соединяющим точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Обозначим отрезок $[a, b]$ через I_0. Полагая $A = f(a)$ и $B = f(b)$, исходя из подобия соответствующих треугольников для нахождения величины x_1 имеем уравнения:

$$\frac{\alpha - A}{x_1 - a} = \frac{B - \alpha}{b - x_1} = \frac{\alpha - B}{x_1 - b}.$$

Отсюда находим

$$x_1(\alpha - A) - b(\alpha - A) = x_1(\alpha - B) - a(\alpha - B),$$

$$x_1 = \frac{-a(\alpha - B) + b(\alpha - A)}{B - A}.$$

Затем в качестве I_1 берем один из отрезков $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$ так, чтобы число α вновь находилось между значениями $f(x)$ на его концах, т.е. на концах отрезка I_1 функция $f(x) - \alpha$ имеет значения разных знаков. По тому же правилу находим I_2 и т.д. Получим систему вложенных отрезков: $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ Как известно, они содержат общую точку c.

Если, например, $f'(x) \geq 0$, то $f(x)$ не убывает, и тогда из непрерывности $f(x)$ следует, что $f(c) = \alpha$, поскольку на концах каждого из отрезков I_n функция $g(x) = f(x) - \alpha$ имеет значения разных знаков.

Метод касательных. Этот метод состоит в следующем. Пусть для простоты $\alpha = 0$. (Если это не так, то вместо уравнения $f(x) = \alpha$ рассмотрим уравнение $g(x) = 0$, где $g(x) = f(x) - \alpha$.) Величину x_1 определим из соотношения

$$\frac{f(b)}{b - x_1} = f'(b) \quad \text{т.е.} \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

При $n \geq 1$ далее имеем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

В обоих методах надо еще уметь определить момент, когда следует оборвать процесс вычислений. Чтобы упростить решение этого вопроса и сократить объем вычислений, применяют следующий **комбинированный метод.**

Метод хорд и касательных. Сущность этого метода состоит в нахождении пар точек x_n, y_n, подчиненных следующему условию $x_n \leq c \leq y_n$. Схема вычисления величин x_n и y_n такова. Пусть $f''(x) > 0$ на $I_0 = [a, b]$. Определим x_1 по методу хорд, а y_1 — по методу касательных. Тогда имеем $x_1 < c < y_1$, и далее за I_1 принимаем отрезок $[x_1, y_1]$. Точно так же, находя x_2 по методу хорд, а y_2 по методу касательных, получим отрезок $I_2 = [x_2, y_2]$ и т.д. Как только окажется, что $|x_n - y_n| < \delta$, на этом процесс вычисления c с точностью до δ обрывают.

Пример. Пусть $f(x) = x^2 - a$, $\alpha = 0$, $a = 2$.

Применим метод касательных. Для определенности положим $x_0 = 1$. Величина x_{n+1} определяется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Для того чтобы выяснить, как быстро сходится этот вычислительный процесс, проведем оценку погрешности на $(n+1)$-м шаге. С этой целью обозначим через r_n величину $r_n = |\sqrt{a} - x_n|$. Тогда

$$r_n^2 = (\sqrt{a} - x_n)^2 = a - 2x_n\sqrt{a} + x_n^2,$$

откуда

$$\frac{r_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right) - \sqrt{a} = r_{n+1}.$$

Из неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ получаем, что при $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{a}.$$

Следовательно,

$$r_{n+1} \leq \frac{r_n^2}{2\sqrt{a}} < \frac{r_n^2}{2}, \quad \text{так как} \quad a = 2.$$

Отсюда можем заключить, что если x_n приближает $\sqrt{a}$ с точностью до k десятичных знаков после запятой, т.е. $r_n \leq 10^{-k}$, то x_{n+1} приближает $\sqrt{a}$ уже с точностью до $2k$ знаков, т.е. $r_{n+1} \leq 10^{-2k}$. Если за x_0 возьмем, например, число 1,4, которое, как известно, приближает $\sqrt{2}$ с точностью до одного знака, т.е. $|\sqrt{2} - 1,4| \leq 10^{-1}$, то получим $r_1 < 10^{-2}$, $r_2 < 10^{-4}$, ..., $r_n < 10^{-2^n}$, ... Мы видим, что за n шагов точность составит величину, не меньшую чем k знаков, где $k = 2^n$. Так что для вычисления числа $\sqrt{2}$ с заданной точностью в k знаков достаточно выполнить n итераций, где

$$n = [\log_2 k] + 1.$$

Такого же типа оценки для метода Ньютона имеют место и в общем случае решения уравнения $f(x) = 0$, если начальное приближение взято достаточно "хорошим". Доказательство этого утверждения основано на применении формулы Тейлора с разложением до второго члена.

Обратим внимание на следующий факт: при оценке эффективности вычислительного алгоритма надо обращать внимание не только на количество итераций, но и на количество арифметических операций в каждой итерации. Например, при вычислении $\sqrt{a}$ количество арифметических операций в каждой итерации равно 3: одно деление, одно сложение и одно умножение. Следовательно, для вычисления $\sqrt{a}$ с точностью до k знаков надо выполнить $3[\log_2 k]+3$ арифметических операций. Но и это еще не все. Во-первых, надо иметь в виду, что нет необходимости в начальных итерациях учитывать все k знаков, так как точность приближения от этого не возрастает; во-вторых, проводить деление в столбик гораздо труднее, чем умножать числа, а умножать труднее, чем складывать.

Отметим, что метод Ньютона дает возможность заменить деление умножением. Действительно, имеем

$$f(x) = \frac{1}{x} - \alpha, \quad x_0 = 1.$$

Тогда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{1/x_n - \alpha}{-1/x_n^2} = 2x_n - \alpha x_n^2.$$

Как и раньше, имеем

$$r_n = \left|\frac{1}{\alpha} - x_n\right|, \; r_n^2 = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2x_n}{\alpha} + x_n^2, \; \alpha r_n^2 = \frac{1}{\alpha} - (2x_n + \alpha x_n^2) = r_{n+1}.$$

Теперь, например, при $\alpha < 1$ и $r_0 < 10^{-1}$ для величины n — количества итераций — при вычислении с точностью до k десятичных знаков после запятой имеем $n \le [\log_2 k] + 1$.

Еще более строгий подход к вопросу об эффективности вычислительного алгоритма состоит в учете операций над цифрами, с помощью которых записывается число. Тогда можно сказать, что, например, сложение двух n-значных натуральных чисел требует не более $3n$ операций, а "школьный" способ умножения чисел в столбик требует порядка n^2 поразрядных умножений и порядка n^2 сложений. Поэтому кажется естественным, что быстрее чем за $O(n^2)$ операций умножить два n-значных числа нельзя. В 50-х гг. академик А.Н. Колмогоров поставил задачу доказать это, на первый взгляд, правильное утверждение. Но оказалось, что это не так.

В 1961 г. А.А. Карацуба доказал замечательную теорему, которая положила начало совершенно новому направлению в вычислительной математике — теории быстрых вычислений. Он доказал, что два n-значных числа можно умножить не за $O(n^2)$, а за $O(n^{\log_2 3})$ операций.

Теорема (теорема А.А. Карацубы). *Существует алгоритм, позволяющий умножить два n-значных числа за $O(n^{\log_2 3})$ операций.*

Доказательство. Представим числа в двоичной записи: $a = \bar{a}_n \ldots \bar{a}_1$, $b = \bar{b}_n \ldots \bar{b}_1$. Заметим, что

$$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2).$$

Для деления числа на 4 достаточно сдвинуть его на 2 разряда вправо, это займет только $O(n)$ операций. Так что достаточно доказать, что возведение в квадрат n-значного числа потребует указанного числа операций. Доказательство проведем по индукции. Пусть для простоты $n = 2^k$ и пусть

$$a = 2^{n/2} \cdot \alpha + \beta,$$

где α и β — $n/2$-значные числа. Тогда имеет место тождество

$$a^2 = \alpha^2(2^n - 2^{n/2}) + (\alpha + \beta)^2 2^{n/2} - \beta^2(2^{n/2} - 1).$$

Если число операций для возведения в квадрат n-значного числа обозначим через $K(n)$, то

$$\begin{aligned}
K(n) &\le 3K(n/2) + cn, \\
K(n/2) &\le 3K(n/4) + cn/2, \\
\ldots\ldots &\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
K(2) &\le 3K(1) + c, \\
K(n) &\le 3^k + c(n + 3\frac{n}{2} + 3^2\frac{n}{4} + \cdots + 3^k),
\end{aligned}$$

где $k = \log_2 n$. Отсюда имеем

$$K(n) \le 3^k(3c+1).$$

Теорема доказана.

В заключение укажем на одно соображение общего характера, лежащее в основе многих итерационных вычислительных алгоритмов. Пусть требуется найти значение функции в точке x_0, т.е. вычислить $f_0 = f(x_0)$. Обозначим через f_n приближение к f_0 с точностью Δ_n (до n десятичных знаков):

$$\Delta_n = |f_n - f_0|.$$

Допустим, нам известна функция $G(x)$ со следующим свойством:

$$G(f_0) = f_0, \quad G'(x)|_{x=f_0} = 0.$$

Тогда имеем

$$G(f_n) = G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) + \frac{G''(\xi)}{2}(f_n - f_0)^2,$$

откуда $|f_0 - G(f_n)| \leq c\Delta_n^2$, где $c = \max \frac{|G''(\xi)|}{2}$.

Теперь, полагая $f_{n+1} = G(f_n)$, получим приближение к f_0 с точностью порядка $2n$ десятичных знаков после запятой. Тем самым мы имеем быстросходящийся алгоритм для приближенного вычисления значения f_0. Заметим, что рассмотренный выше алгоритм вычисления корня квадратного из числа x_0 является частным случаем данного при $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ и $G(f_n) = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{x_0}{f_n}\right)$.

Глава VI
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция 28

§ 1. ТОЧНАЯ ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 1. *Функция $F(x)$ называется* **точной первообразной** *для функции $f(x)$ на (a, b), если при любом $x \in (a, b)$ имеем $F'(x) = f(x)$, т.е. в каждой точке x интервала (a, b) значение функции $f(x)$ является производной для функции $F(x)$.*

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ определена на (a, b) и $F_1(x)$, $F_2(x)$ — две ее точные первообразные. Тогда существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что при любом $x \in (a, b)$*

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

Доказательство. Пусть функция

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

Тогда $G(x)$ — дифференцируемая функция, причем всюду на (a, b)

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Положим $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Тогда по формуле Лагранжа конечных приращений имеем

$$G(x) - G(x_0) = G'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

т.е.

$$G(x) = G(x_0) \ \forall \ x \in (a, b).$$

Но, полагая $c = G(x_0)$, получим, что $G(x) = c$ для всех точек x интервала (a, b). Теорема 1 доказана.

Замечание. Из теоремы 1 следует такое утверждение: любые две первообразные $F(x)$ и $G(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ отличаются на константу тогда и только тогда, когда их производные совпадают, т.е.

когда $F' = f = g = G'$. Ранее мы видели, что далеко *не все функции*, заданные на каком-либо интервале (a, b), имеют производную.

Аналогично обстоит дело и с первообразной, т.е. не все функции имеют производную. Но если функция $f(x)$, определенная на (a, b), имеет первообразную, то она называется **интегрируемой**. Прежде чем перейти к изучению класса интегрируемых функций, несколько обобщим понятие точной первообразной.

Определение 2. *Непрерывная функция $F(x)$ называется* **первообразной** *функции $f(x)$ на интервале (a, b), если в каждой его точке x за исключением, быть может, конечного их числа выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Теорема 2. *Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$ на (a, b). Тогда найдется число c такое, что всюду на этом интервале*

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — конечное множество точек, на котором не существует $F_1'(x)$ или $F_2'(x)$. Тогда множество (a, b) состоит из конечного числа интервалов I_k, на которых производные обеих функций существуют. Следовательно, по теореме 1 их разность постоянна на каждом таком интервале. Кроме того, эта разность является непрерывной функцией на всей области определения. Отсюда следует, что в общей граничной точке любых двух смежных интервалов ее значение равно одновременно пределу справа и слева. Эти значения, в свою очередь, совпадают с ее значениями на смежных интервалах. А это значит, что функция на смежных интервалах, включая точку их общей границы, постоянна. Следовательно, она постоянна на всем интервале (a, b), что и требовалось доказать.

Определение 3. *Совокупность всех первообразных функций для какой-либо одной функции $f(x)$ на интервале называется* **неопределенным** *интегралом от функции $f(x)$. Эта совокупность обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается: интеграл от $f(x)dx$).*

Из теоремы 2 следует, что все функции этой совокупности отличаются друг от друга на постоянную. Поэтому, если $F(x)$ — какая-нибудь одна первообразная, то можно записать равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \qquad (1)$$

где c — произвольное число.

Это равенство надо понимать как равенство двух множеств, состоящих из функций, определенных на (a, b), причем слева стоит совокупность, образующая неопределенный интеграл от $f(x)$, а справа — совокупность функций, отличающаяся от функции $F(x)$ на функцию, значение которой равно числу c для всех точек x этого интервала.

Примеры.

1. $\int 1 \cdot dx = x + c$, так как $x' = 1$.
2. $\int 0 \cdot dx = c$,
3. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Для доказательства этих равенств надо продифференцировать правую часть и убедиться, что ее производная равна функции, записанной слева между знаком $\int$ и символом dx. Она называется **подынтегральной функцией.** Знак $\int$ называется знаком интеграла, а выражение, записываемое справа от него, — подынтегральным выражением.

Легко видеть, что подынтегральное выражение есть не что иное, как дифференциал любой первообразной функции для $f(x)$. Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то по определению дифференциала

$$dF(x) = f(x)dx.$$

А так как

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad d(F(x) + c) = dF(x), \tag{1}$$

то можно записать равенства

$$\int dF(x) = F(x) + c, \quad d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = f(x)dx, \tag{2}$$

причем знак равенства в последнем соотношении означает, что все функции, входящие в совокупность $\int f(x)dx$, имеют один и тот же дифференциал $dF(x)$. Также имеем

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \tag{3}$$

Определение 4. Нахождение неопределенного интеграла от функции $f(x)$, заданной на (a, b), называется интегрированием *этой функции. Саму задачу нахождения неопределенного интеграла можно рассматривать как обратную к задаче нахождения дифференциала функции.*

Лекция 29

§ 2. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Из правил дифференцирования функции и теоремы 2 следует ряд свойств неопределенного интеграла. Приведем некоторые из них, которые задаются равенствами и доказываются с помощью дифференцирования обеих частей этих равенств. Прежде всего докажем, что равенство

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx \tag{4}$$

эквивалентно одному из следующих четырех равенств:

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int g(x)dx\right)'$;

б) $d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(\int g(x)dx\right)$;

в) $f(x) = g(x)$;

г) $f(x)dx = g(x)dx$,

которые имеют место при всех $x \in (a, b)$, за исключением, быть может, конечного числа точек.

В самом деле, силу приведенных выше свойств (1)–(3) равенства а)–г) действительно эквивалентны. А равенство (4) означает лишь то, что любые две первообразные F, G для функций f и g отличаются между собой на константу. Но согласно замечанию к теореме 1 для этого необходимо и достаточно, чтобы $f = g$, т.е. равенство (4) равносильно равенству в).

Замечание. Свойство (4) дает критерий равенства двух неопределенных интегралов: они совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их производные или дифференциалы. Докажем теперь следующее свойство:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \tag{5а}$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \ \forall\ \alpha \neq 0. \tag{5б}$$

Эти равенства надо понимать как совпадение двух совокупностей функций, стоящих в этих равенствах справа и слева. (Напомним, что два множества равны, когда они состоят из одних и тех же элементов.) Надо пояснить, что совокупность

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx$$

состоит из всевозможных функций, образованных суммами функций $F(x)+G(x)$, где $F(x)\in\int f(x)dx$, $G(x)\in\int g(x)dx$, т.е.

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=\{F(x)+G(x)\},$$

где

$$\{F(x)\}=\int f(x)dx,\quad \{G(x)\}=\int g(x)dx.$$

Теперь для доказательства (5) в силу свойства (4) достаточно продифференцировать эти равенства. Доказательство закончено.

Заметим, что для простоты применения на символы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$ удобно смотреть, как на обычные функции, подразумевая под ними некоторые первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, а равенство между выражениями, в которые они входят линейно, понимать с "точностью до постоянной", имея в виду, что правая и левая части отличаются на функцию, постоянную на (a,b).

С помощью свойства (4) можно легко установить еще два свойства неопределенных интегралов, важных для непосредственного интегрирования:

правило интегрирования по частям

$$u(x)v(x)-\int u(x)dv(x)=\int v(x)du(x), \tag{6}$$

правило замены переменной

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{7}$$

где $x=\varphi(t)$ — дифференцируемая функция от t, определенная на интервале (α,β), причем множество значений $\{\varphi(t)\}$ принадлежит интервалу (a,b). Мы предполагаем, что в обоих равенствах интегралы в левых частях действительно существуют; из этого следует существование интегралов и в правых частях этих равенств.

Докажем свойство (6). Так как по условию интеграл в левой части равенства существует, то ее дифференциал равен

$$d\left(uv-\int u\,dv\right)=u\,dv+v\,du-u\,dv=v\,du.$$

Отсюда в силу свойства (4) следует справедливость свойства (6).

Для доказательства свойства (7) заметим, что по правилу дифференцирования сложной функции и свойству (3) при $x=\varphi(t)$ имеем

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t=\left(\int f(x)dx\right)'_x\frac{d\varphi(t)}{dt}=f(x)|_{x=\varphi(t)}\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, согласно свойству (4) интеграл $\int f(x)dx$ при $x = \varphi(t)$ есть в то же время и неопределенный интеграл от функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т.е.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

С помощью дифференцирования легко убедиться в том, что справедливы следующие равенства для неопределенных интегралов от простейших элементарных функций:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \; n \neq -1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$

3) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c;$

4) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c;$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c;$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \; a > 0, \; a \neq 1,$

$\int e^x dx = e^x + c;$

8) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c;$

9) $\int \cos x \, dx = \sin x + c;$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$

12) $\int \ln x dx = x \ln x - x + c.$

Как мы уже отмечали, не всякая функция имеет точную первообразную, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in (0,1), \\ 2, & \text{если} \quad x = 1, \\ 3, & \text{если} \quad x \in (1,2). \end{cases}$$

Эта функция определена на $(0,2)$ и не может являться производной какой-либо функции $F(x)$ на $(0,2)$, так как по теореме Дарбу производная принимает все свои промежуточные значения, а $f(x)$ — всего три значения: 1, 2, 3.

В дальнейшем мы докажем *формулу Ньютона–Лейбница*, из которой следует, что функция, *непрерывная* на интервале, имеет первообразную, т.е. интегрируема. Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании. Например, можно доказать, что функции

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x} \quad \text{(интегральный логарифм)},$$

$$\operatorname{si} x = \int \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{(интегральный синус)}$$

не являются элементарными.

Функции, сами не являющиеся элементарными, но определяемые через них с помощью аналитических соотношений типа интегрирования и дифференцирования, обычно называют **специальными функциями**. Однако следует отдавать себе отчет в том, что, например, с вычислительной точки зрения специальные функции, вообще говоря, "ничуть не хуже", чем элементарные, а иногда и "лучше". Но все же простейшие элементарные функции имеют преимущество, состоящее в простоте тех функциональных соотношений, которым они удовлетворяют.

Еще раз подчеркнем, что единого метода интегрирования элементарных функций существовать не может, так как первообразная может и не быть элементарной функцией. Но для нахождения первообразной в явном виде имеется несколько приемов. Говоря о методах интегрирования, снова напомним, что для выяснения того, является ли известная нам функция $F(x)$ первообразной для $f(x)$, нет необходимости "брать интеграл", т.е. вычислять $\int f(x)dx$, здесь надо просто найти $F'(x)$ и сравнить ее с $f(x)$.

Примеры. 1. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на (a,b), $C(x) = \sum\limits_{a<n\le x} c_n$. Тогда

$$F(x) = \sum_{a<n\le x} c_n f(n) - C(x)f(x) = -\int C(x)f'(x)dx.$$

Действительно, если x — не целое число, то, поскольку $C(x)$ и $\sum\limits_{a<n\le x} c_n$ кусочно-постоянны на интервалах, не содержащих целых точек,

$$F'(x) = -C(x)f'(x).$$

Ранее мы убедились, что $F(x)$ непрерывна на (a,b). Так что $F(x)$ есть первообразная для функций $C(x)f'(x)$.

2. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на (a, b), $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Тогда имеет место формула

$$F(x) = \sum_{a<n\leq x} f(n) - \rho(x)f(x) + \rho(a)f(a) = \int (f(x) - \rho(x)f'(x))dx.$$

Действительно, если x — не целое число, то

$$F'(x) = (-\rho(x)f(x))' = f(x) - \rho(x)f'(x).$$

Далее, так как $F(x)$ — непрерывная функция, то $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) - \rho(x)f'(x)$.

Иногда дифференцирование ответа оказывается очень громоздкой процедурой, так что целесообразно с помощью различных приемов сводить процесс вычисления к табличным интегралам. Для того чтобы уверенно и быстро вычислять интегралы, необходим определенный навык применения стандартных приемов интегрирования. Самые простые и самые общие из этих приемов — это метод замены переменной и метод интегрирования по частям [см. свойства (5) и (6)].

Подробнее с различными методами интегрирования можно познакомиться, например, в [4, 7, 15, 16].

Лекция 30

ДОПОЛНЕНИЕ. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ПО ГЕЙНЕ НА ФУНКЦИИ, СХОДЯЩИЕСЯ ПО БАЗЕ МНОЖЕСТВ

Предметом настоящей лекции является распространение классического понятия предела функции по Гейне на общий случай сходимости по базе множеств. Как известно, построение курса математического анализа основано на двух эквивалентных понятиях сходимости: пределах по Коши и по Гейне. Одновременное использование обоих понятий в курсе мотивируется его содержанием. В частности, это позволяет унифицировать и сделать значительно яснее использование пределов во всем их разнообразии, включая теорию интегрирования, функции многих переменных и др.

Необходимо отметить, что понятие сходимости по базе множеств было впервые сформулировано А. Крыжановским [22] (в несколько отличающейся терминологии). В 1937 г. В.И. Гливенко [23] использовал это понятие для общего определения интеграла. Позже, как отмечал А.Н. Колмогоров, французская математическая школа пришла к тому же понятию в рамках теории фильтров.

В связи с успешным развитием теории сходимости по Коши возникла неотложная необходимость в соответствующем обобщении понятия предела функции по Гейне [24],[25]. Здесь мы решаем эту задачу. Введем понятие H-предела по базе, которое совпадает с классическим определением предела по Гейне в простейших конкретных случаях. Затем установим эквивалентность понятия H-предела по базе, введенного нами, и общепринятого определения предела функции по Коши. Наконец, как нетривиальный пример введенного понятия H-сходимости по базе, мы продемонстрируем новый подход к определению и исследованию верхнего и нижнего пределов функции по базе.

1. Пусть A — основное множество элементов x, $A = \{x\}$, и пусть B — база его подмножеств, которая состоит из бесконечного числа окончаний b, т.е. $b \subset A$, $b \in B$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) каждое окончание является непустым множеством;

2) для любых двух окончаний b_1, b_2 существует окончание b_3 такое, что $b_3 \subset b_1 \cap b_2$.

Определение 1. Мы называем последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in A$, *фундаментальной* по базе B, если для любого окончания b существует только лишь конечное число членов последовательности, которые не принадлежат b.

Определение 2. Фундаментальная последовательность называется *монотонной* (по базе B), если условие $x_n \in b$ влечет условие $x_{n+1} \in b$ для каждого окончания b.

Далее мы ограничимся базами B, удовлетворяющими также следующим условиям:

3) для любых двух окончаний b_1, b_2 имеем, что либо $b_1 \subseteq b_2$, либо $b_2 \subseteq b_1$;

4) существует по крайней мере одна монотонная последовательность по базе множеств B;

5) $\bigcap\limits_{b \in B} b = \varnothing$.

2. Докажем несколько свойств монотонных последовательностей по базе.

Л е м м а 1. *Пусть $\{x_n\}$ — монотонная последовательность по базе B. Тогда существуют ее подпоследовательность $\{y_k\}$, $y_k = x_{n_k}$, и последовательность окончаний $b_n \in B$, зависящая от $\{y_k\}$, такие, что $x_{n_k} \in b_k$, но $x_{n_k} \notin b_{k+1}$, $b_{k+1} \subset b_k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве b_1 выберем произвольное окончание из B. Существует только конечное число членов последовательности, которые не принадлежат b_1. Пусть $x_{n_1} \in b_1$, тогда для любого $k \geq 0$ имеем $x_{n_1+k} \in b_1$ (по свойству монотонности $\{x_n\}$). В качестве b_2 выберем некоторое окончание, которому не принадлежит x_{n_1}. Такое b_2 существует, поскольку $H_B = \bigcap_{b \in B} b = \varnothing$. Действительно, если $x_{n_1} \in b$ для любого окончания b, то $x_{n_1} \in H_B$. Но тогда H_B не будет пустым множеством. В качестве x_{n_2} выберем член последовательности с минимальным индексом, начиная с которого все последующие члены последовательности принадлежат b_2, и т.д.

Таким образом, мы получаем две последовательности: элементов $y_s = x_{n_s}$ и окончаний $\{b_s\}$, $b_s \in B$ таких, что $x_{n_s} \in b_s$, $x_{n_s} \notin b_{s+1}$ и $b_{s+1} \subset b_s$ для каждого $s \geq 1$. Лемма 1 доказана.

Заметим, что последовательность $\{y_s\}$, очевидно, является монотонной по базе B. Последовательность $\{b_n\}$ назовем **основной последовательностью окончаний.**

Л е м м а 2. *Пусть $\{b_n\}$ — основная последовательность окончаний. Тогда для каждого окончания $b \in B$ существует окончание $b_n \in B$ такое, что $b_n \subset b$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть b^* такое окончание, что для всех n имеем $b_n \not\subset b^*$. Тогда в соответствии со свойством 3 базы B выполняется следующее условие: $b_n \supset b^*$ для всякого $n \geq 1$, т.е. $b^* \subset \bigcap_n b_n = D$. Из леммы 1 имеем, что $y_n \notin b_{n+1}$. Следовательно, $y_n \notin \bigcap_n b_n = D$, т.е. бесконечно много, даже все члены последовательности $\{y_n\}$ не принадлежат D. Далее, так как $b^* \subset D$, то окончанию b^*не принадлежит бесконечно много членов последовательности $\{y_n\}$. Это противоречит тому, что последовательность является фундаментальной. Лемма 2 доказана.

3. Пусть $f(x)$ — вещественная функция, определенная на A. Мы называем число l C-пределом функции $f(x)$ по базе B, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b = b(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \in b$ имеем $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Обозначение: $l = C\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$ или просто $l = \lim\limits_{B} f(x)$.

Это соответствует определению предела функции по Коши. Дадим теперь аналогичное определение предела по Гейне.

Число l будем называть Hm-пределом функции $f(x)$ по базе B, если для каждой монотонной последовательности $\{x_n\}$ по базе B имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Обозначение: $l = Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы существовал* $C\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал* $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$; *более того, имеем*

$$Hm\text{-}\lim_{B} f(x) = C\text{-}\lim_{B} f(x).$$

Другими словами, понятия Hm-предела и C-предела функции по базе B являются эквивалентными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть C-предел существует, т.е.

$$C - \lim_{B} f(x) = l.$$

Тогда по определению для любого $\varepsilon > 0$ существует $b = b(\varepsilon)$ такое, что при всех $x \in b$ справедливо неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, монотонную по базе B. Из условия монотонности следует, что существует n_0 такое, что для всех $n > n_0$ имеет место соотношение $x_n \in b$. Следовательно,

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Достаточность. Предположим противное. Пусть $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x) = l$, но C-предел не существует или не равен l. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого окончания $b \in B$ найдется $x \in b$, для которого $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим основную последовательность окончаний $\{b_n\}$. Пусть $z_1 \in b_1$ и $|f(z_1) - l| \geq \varepsilon$. Так как $H_B = \bigcap_{b \in B} b = \varnothing$, то существует окончание $b^{(1)} \in B$ такое, что $z_1 \notin b^{(1)}$. В силу леммы 2 при некотором n_1 имеем $b_{n_1} \subset b^{(1)}$. Следовательно, $z_1 \notin b_{n_1}$.

Далее, существует точка $z_2 \in b_{n_1}$ такая, что $|f(z_2) - l| \geq \varepsilon$. Как и выше, мы находим окончание b_{n_2}, удовлетворяющее условию $z_2 \notin b_{n_2}$. Затем выбираем $z_3 \in b_{n_2}$ такое, что $|f(z_3) - l| \geq \varepsilon$, и т.д. Таким образом, мы получаем последовательность $\{z_n\}$, которая удовлетворяет условиям $z_k \in b_{n_{k-1}}$, $z_k \notin b_{n_k}$, и последовательность окончаний $b_1 = b_{n_0} \supset b_{n_1} \supset b_{n_2} \supset \ldots$

Покажем, что последовательность $\{z_n\}$ является фундаментальной и монотонной по базе B.

Фундаментальность. Возьмем любое окончание $b^* \in B$. По лемме 2 существует окончание b_k такое, что $b_k \subset b^*$. Если $n_s > k$, то $b_{n_s} \subset b_k \subset b^*$. Окончанию b_{n_s} не принадлежат только элементы $z_1, \ldots, z_s$ последовательности $\{z_n\}$, и для любого $n > s$ имеем $z_n \in b_{n_s} \subset b^*$. Значит, последовательность $\{z_n\}$ является фундаментальной.

Монотонность. (От противного). Предположим, что существует окончание $b^* \in B$ такое, что для некоторого номера k имеем $z_k \in b^*$, $z_{k+1} \notin b^*$. Из построения последовательности $\{z_n\}$ получим, что $z_{k+1} \in b_{n_k}$. Следовательно, $b_{n_k} \supset b^*$ (по свойству 3 базы). Так как $z_k \in b^*$, то $z_k \in b_{n_k}$. Однако это противоречит тому факту, что по построению последовательности $\{z_k\}$ справедливо условие $z_k \notin b_{n_k}$. Таким образом, последовательность $\{z_k\}$ является монотонной.

Далее, из того, что

$$Hm\text{-}\lim_{B} f(x) = l,$$

имеем

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = l.$$

Следовательно, мы можем перейти к пределу в неравенстве

$$|f(z_n) - l| \geq \varepsilon > 0.$$

Получим $0 \geq \varepsilon > 0$, что невозможно. Теорема доказана.

Будем говорить, что число l называется **H-пределом функции $f(x)$ по базе B**, если для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ по базе B выполнено условие

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l.$$

Обозначение: $l = H\text{-}\lim_{B} f(x)$.

Т е о р е м а 2. *Следующие три понятия предела эквивалентны:*
1) $\lim\limits_{B} f(x) = l$;
2) $H\text{-}\lim\limits_{B} f(x) = l$;
3) $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x) = l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеет место следующая цепочка утверждений: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Первые два из них очевидны, а третье следует из теоремы 1.

4. Теперь докажем несколько свойств верхнего и нижнего предела по базе.

Пусть $\{x_n\}$ — монотонная последовательность по базе B и пусть существует

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Тогда l называется **частичным пределом по базе** B. Наибольший из частичных пределов (если он существует) называется **верхним пределом функции** $f(x)$ **по базе** B и обозначается $\overline{\lim\limits_{B}} f(x)$; подобным образом наименьший частичный предел называется **нижним пределом по базе** B и обозначается $\underline{\lim\limits_{B}} f(x)$.

Число l_1 называется **верхним предельным числом,** если

$$l_1 = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x),$$

а число l_2 — **нижним предельным числом,** если

$$l_2 = \sup_{b\in B} \inf_{x\in b} f(x).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть $f(x)$ финально ограничена. Тогда верхний и нижний пределы $f(x)$ по базе B существуют и*

$$\overline{\lim_{B}} f(x) = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x),$$
$$\underline{\lim_{B}} f(x) = \sup_{b\in B} \inf_{x\in b} f(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых двух окончаний b_1, b_2 базы B имеем

$$\inf_{x\in b_1} f(x) \le \sup_{x\in b_2} f(x).$$

Действительно, если b_3 — окончание базы B и $b_3 \subset b_1 \cap b_2$, то

$$\inf_{x\in b_1} f(x) \le \inf_{x\in b_3} f(x) \le \sup_{x\in b_3} f(x) \le \sup_{x\in b_2} f(x).$$

Следовательно, в силу финальной ограниченности $f(x)$ по базе B существует такое число λ, что

$$\lambda = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x).$$

Докажем, что

$$\overline{\lim_{B}} f(x) = \lambda.$$

Шаг 1. Мы можем найти окончание $b^* \in B$, для которого $f(x) < \lambda+1$ для любых $x \in b^*$. Из леммы 2 следует, что существует окончание $b_{n_1} \in B$ с условием $b_{n_1} \subset b^*$. Покажем, что можно найти элемент $x_1 \in b_{n_1}$ с условием

$$\lambda + 1 > f(x_1) > \lambda - 1.$$

Достаточно показать, что

$$\sup_{x\in b_{n_1}} f(x) \geq f(x_1) > \lambda - 1.$$

Если бы такого элемента x_1 не было, то $\forall\ x \in b_{n_1}$ выполнялось неравенство $f(x) \leq \lambda - 1$. Следовательно,

$$\sup_{x\in b_{n_1}} f(x) \leq \lambda - 1,$$

откуда имеем

$$\lambda = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x) \leq \lambda - 1.$$

Имеет место противоречие.

Далее мы можем найти окончание $b_0^{(1)}$ такое, что $x_1 \notin b_0^{(1)}$. (Такое окончание существует, поскольку $H_B = \bigcap_{b\in B} b = \varnothing$.)

Шаг 2. Выберем окончание $b^{(2)} \in B$, подчиненное условию

$$f(x) < \lambda + \frac{1}{2} \quad \forall\ x \in b^{(2)}.$$

Рассмотрим окончание $b_1^{(2)} \subset b^{(2)} \cap b_0^{(1)}$. Окончанию $b_1^{(2)} \in B$ не принадлежит x_1. Далее, как и в шаге 1, существует окончание $b_{n_2} \subset b_1^{(2)}$, которое содержит точку $x_2 \neq x_1$ такую, что

$$\lambda - \frac{1}{2} < f(x_2) < \lambda + \frac{1}{2},$$

и т.д. Наконец мы получаем последовательность $\{x_s\}$, которая удовлетворяет условиям

$$x_s \in b_{n_s}, \quad x_s \notin b_{n_{s-1}}, \quad \lambda - \frac{1}{s} < f(x_s) < \lambda + \frac{1}{s}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что $\{x_n\}$ — монотонная последовательность по базе B. Кроме того, при $n \to \infty$ справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$, т.е. λ — частичный предел по базе B.

Шаг 3. Покажем, что любой частичный предел функции $f(x)$ по базе B не превосходит λ. Из определения величины λ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окончание b с условием

$$\sup_{x\in b} f(x) < \lambda + \varepsilon.$$

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная монотонная последовательность по базе B, для которой существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. В силу фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ только конечное число ее членов не принадлежат b, т.е. существует номер n_0 такой, что для всех номеров n, больших n_0, имеем $f(x_n) < \lambda + \varepsilon$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \lambda + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \lambda$. Теорема доказана.

Пусть l_1 и l_2, как и прежде, верхнее и нижнее предельные числа соответственно. Мы назовем число $l_2 - l_1 \ge 0$ **колебанием функции** $f(x)$ **по базе** B и обозначим

$$\operatorname*{osc}_B f(x) = l_2 - l_1.$$

Критерий Коши в этих обозначениях формулируется следующим образом.

Для существования предела функции $f(x)$ по базе B необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname*{osc}\limits_B f(x) = 0$.

Отметим, что из теоремы 3, в частности, следует, что:

1) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = \inf\limits_{T>0} \sup\limits_{x>T} f(x);$

2) $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x) = \inf\limits_{T>0} \sup\limits_{|x|>T} f(x);$

3) $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = \inf\limits_{\delta>0} \sup\limits_{0<|x-x_0|<\delta} f(x).$

Замечания. 1. Теорема 1 даже в простейших случаях несколько сильнее, чем классическая теорема, утверждающая эквивалентность поточечной сходимости по Коши и Гейне, поскольку требуются только монотонные последовательности. Это, в свою очередь, иногда удобно в приложениях.

С другой стороны, можно рассматривать базы, для которых каждая фундаментальная последовательность не является монотонной. В этом случае, конечно, Hm-сходимость не определена, тем не менее, теорема 2, утверждающая эквивалентность H- и C-сходимости, остается справедливой, так как ее доказательство, по существу, тождественно с выводом теоремы 1 при очевидной подстановке просто фундаментальной последовательности вместо монотонной.

2. Необходимо подчеркнуть, что понятия Hm-, H-сходимости могут быть определены в том случае, если существует по крайней мере одна монотонная фундаментальная последовательность по базе. Кроме того, как показано в лемме 1, для такой базы всегда существует основная последовательность окончаний, которая сама является счетной базой, кофинальной к первоначальной. На языке теории фильтров это означает, что проблема обобщения теоремы Гейне об эквивалентности H- и C-сходимости может рассматриваться только для фильтров со счетной базой.

3. Мы ограничиваемся рассмотрением понятия сходимости только для числовых функций. Однако результат теоремы 2 без труда может быть распространен на общий случай отображений двух баз тогда и только тогда, когда они допускают существование монотонных или просто фундаментальных последовательностей.

4. Условие 3, налагаемое на базу B, иногда оказывается невыполненным. Обычно в этих случаях можно вместо базы B рассматривать базу D, удовлетворяющую этому условию, заданную на том же основном множестве и эквивалентную базе B в том смысле, что сходимость любой функции по одной из этих баз влечет за собой ее сходимость и по другой базе к тому же самому значению.

Примером эквивалентных баз являются база B и основная последовательность окончаний $\{b_n\}$ из леммы 1.

ЧАСТЬ II

ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Эта часть курса математического анализа читается во втором семестре и включает в себя основы интегрального исчисления функций одной переменной и дифференциального исчисления в пространстве нескольких измерений. Обе темы объединяет появление в них геометрических понятий как главного объекта изучения.

Следует отметить, что источником основных понятий математического анализа во многом являются представления о простейших свойствах геометрических объектов в реальном пространстве. В качестве примера можно указать на метод вычисления площадей у Архимеда или метод "исчерпывания" Евдокса. Чтобы быть ближе к сущности предмета устанавливается взаимосвязь понятия интегрируемости функции по Риману и вопроса о существовании площади криволинейной трапеции, т. е. ее измеримости по Жордану.

Второй источник понятий математического анализа — арифметика. Поэтому мы стремились к раскрытию арифметических аспектов математического анализа, понимая под этим, скорее, их обусловленность дискретными элементами, имеющими арифметическую природу, связанную, в конечном счете, со свойствами натуральных чисел. Сюда можно отнести доказанные в курсе формулы суммирования Эйлера и Абеля, метод интегральных сумм, равномерные разбиения в теории интеграла Римана, критерий Г. Вейля для равномерного распределения последовательности по модулю единица, признак алгебраичности функций, данный Эйзенштейном. Упомянем также об упрощении в изложении вывода формулы длины дуги кривой.

Необходимо сказать еще о том, что в этой части книги рассматривается ряд понятий, которые в дальнейшем более подробно изучаются в рамках других предметов. Здесь дается о них первое и в то же время достаточно отчетливое представление с тем, чтобы облегчить усвоение соответствующего материала в будущем, и, может быть, что еще в большей степени обеспечит понимание специальных курсов естественнонаучного содержания.

Глава VII
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция 1

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (α,β), содержащем отрезок $[a,b]$. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на этом отрезке $[a,b]$ называется число, равное площади криволинейной трапеции, т.е. фигуры, заключенной между прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и кривой $y=f(x)$, причем площадь той части, которая лежит выше оси абсцисс берется со знаком $+$, и ниже ее — со знаком - Интеграл обозначается так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

где число a называется **нижним**, а число b — **верхним пределами интегрирования.**

В связи с данным определением интеграла возникает ряд вопросов. Во-первых, что такое площадь? Этот вопрос — принципиальный, и им мы будем заниматься далее, и весьма продолжительное время.

Более простыми являются следующие вопросы.

1) Почему эта площадь обозначается почти так же, как и неопределенный интеграл?

2) Какая связь существует между неопределенным и определенным интегралами?

Забегая несколько вперед, дадим ответы на последние вопросы.

Прежде всего, заметим, что на определенный интеграл можно смотреть как на функцию верхнего (или нижнего) предела интегрирования, считая другой предел интегрирования фиксированным, т.е., если зафиксируем, скажем, число a, то при любом $b\in(\alpha,\beta)$ мы будем получать свои величины, равные значению интеграла на отрезке $[a,b]$. Тем самым, определяется некоторая функция $F(b)$, заданная на интервале (α,β). Оказывается, что если $f(x)$ непрерывна на (α,β), то из теоремы Ньютона - Лейбница, о которой мы будем говорить далее, следует, что функция $F(x)$ является дифференцируемой, и, более того, она является первообразной для функции $f(x)$, т.е. имеем $F'(x)=f(x)$, и, кроме того, справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Пусть $F_1(x)$ — другая первообразная для $f(x)$. Тогда, поскольку $F_1(x) = F(x) + c$, где c — некоторая постоянная, то

$$F_1(b) - F_1(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Другими словами, это равенство имеет место для любой первообразной из семейства, образующего неопределенный интеграл, т.е. теорема Ньютона – Лейбница указывает на то обстоятельство, что неопределенный и определенный интегралы — это тесно связанные между собой понятия. И для того чтобы их далее изучать, надо разобраться, какой же смысл вкладывается в понятие "*площадь криволинейной трапеции*". Заметим, что к этому вопросу можно подходить по разному, и в зависимости от этого у одной и той же трапеции площадь может существовать или не существовать. Но если в двух различных смыслах она существует, то всегда в обоих случаях она должна быть одной и той же величиной.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Мы уже говорили о том, что понятие "*определенный интеграл*" по существу сводится к определению понятия "*площадь криволинейной трапеции*", т.е. площадь фигуры, лежащей в полосе $a \le x \le b$, и заключенной между графиком функции $y = f(x)$ и осью абсцисс. Другими словами, эта фигура образована множеством A точек вида

$$\{(x, y) |\, a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\},$$

и множеством B

$$\{(x, y) |\, a \le x \le b, f(x) \le y \le 0\}.$$

Площадь всякой плоской фигуры D будем обозначать через $\mu(D)$. Заметим, что площадь любой фигуры на плоскости — это неотрицательное число. Определенный интеграл отличается от площади тем, что он равен разности площадей фигур A и B, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(A) - \mu(B),$$

а не их сумме, как можно было бы ожидать.

Из школьного курса геометрии известны следующие простейшие свойства фигур, имеющих площадь:

1) Если $D_1 \subset D_2$, то $\mu(D_1) \le \mu(D_2)$;

2) Если $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то $\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2)$;

3) Площадь прямоугольника равна произведению длин двух соседних его сторон.

Фигуры, составленные из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, будут иметь площадь. Такие фигуры назовем **простейшими.**

Теперь можно определить понятие площади криволинейной трапеции D, а значит, и понятие определенного интеграла I от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Здесь для простоты рассуждений рассмотрим только случай, когда функция $f(x)$ неотрицательна.

Впишем в фигуру D и опишем вокруг нее простейшие фигуры соответственно D_1 и D_2. Для наглядности можно положить, что функция $f(x)$ является непрерывной. Очевидно, имеем $D_1 \subset D \subset D_2$. Отметим также, что некоторые части границ фигур D_1 и D_2 являются ступенчатыми функциями на отрезке $[a, b]$. Напомним, что функция $h(x)$ называется **ступенчатой,** если на каждом промежутке (x_{i-1}, x_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, она принимает постоянное значение h_i. Пусть фигуре D_1 отвечает ступенчатая функция $h(x)$, а фигуре D_2 — ступенчатая функция $g(x)$. Тогда имеем $h(x) \le f(x) \le g(x)$. **Интегралом от ступенчатой функции** $h(x)$ назовем величину $I(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i$. Справедливо неравенство $I(h) \le I(g)$. Рассмотрим два числовых множества $A = \{I(h)\}$ и $B = \{I(g)\}$. В силу леммы об отделимости этих множеств найдется число I, их разделяющее. Если оно единственно, то мы назовем его **интегралом от функции** $f(x)$ **на отрезке** $[a, b]$, а саму функцию — **интегрируемой** на этом отрезке.

Известно, что если числа $\inf\limits_{D_2 \supset D} I(g)$ и $\sup\limits_{D_1 \subset D} I(h)$ совпадают, то их общее значение и равно I. Поэтому справедлив следующий критерий интегрируемости ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы ограниченная на отрезке функция $f(x)$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовали ступенчатые функции $h(x)$ и $g(x)$ с условием $h(x) \le f(x) \le g(x)$, и такие, что $I(g) - I(h) < \epsilon$.*

Эту теорему мы доказывать сейчас не будем, поскольку построим теорию интеграла Римана, основываясь на более традиционном подходе, и в рамках этого подхода критерий интегрируемости и будет доказан. Тем самым, покажем, что оба подхода к построению интеграла Римана дают один и тот же класс интегрируемых функций.

Отметим также, что рассмотренный выше подход дает возможность определить понятие площади фигуры D через вписанные и описанные простейшие фигуры. Подобным образом далее определим фигуры, измеримые по Жордану, и докажем, что для измеримости по Жордану криволинейной трапеции, отвечающей функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была интегрируема по Риману.

Существуют и другие конструкции, с помощью которых можно ввести понятие и площади, и определенного интеграла, интересующего нас в первую очередь. Смысл этих конструкций состоит в том, чтобы поставить в соответствие каждой функции из некоторого класса свое число таким образом, чтобы при этом выполнялось ряд естественных свойств, которыми обладает площадь простейших фигур. Заметим, что чем сложнее конструкция, тем шире становится класс функций, для которых понятие "определенный интеграл" приобретает смысл. Мы здесь будем рассматривать конструкцию, предложенную немецким математиком Б. Риманом, и поэтому соответствующий интеграл будем называть **интегралом Римана.** Также познакомимся и с интегралом более общего вида: интегралом Лебега, но, в основном, будем заниматься интегралом Римана. Изложение оригинальной конструкции Б.Римана можно найти в его статье "О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда", написанной им в 1853 году. Впервые эта статья была опубликована в 1867 году. На русском языке она появилась в 1914 году ("Харьковская математическая библиотека", серия В, №2).

Заметим, что, например, интеграл Лебега является более общим, чем интеграл Римана, на том основании, что все функции, интегрируемые по Риману, также являются интегрируемыми по Лебегу, но не наоборот. Но подчеркнем, что если функция интегрируема двумя разными способами, то значения интеграла всегда обязаны совпадать. Так что задача расширения понятия интеграла может состоять только в том, чтобы приписать числовые значения определенным интегралам от все более широких классов функций, не меняя при этом значений интегралов для тех функций, у которых это значение установлено.

Переходим к изложению конструкции интеграла Римана. Будем считать, что функция $f(x)$ определена на интервале (α, β), содержащем отрезок $[a, b]$.

Определение 1. *Конечное множество T точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называется* **(неразмеченным) разбиением** *отрезка $[a, b]$, если $n \geq 1$ и $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

Определение 2. *Будем говорить, что* **разбиение T_1 предшествует разбиению T_2 (или разбиение T_2 следует за разбиением T_1),** *если имеет место теоретико-множественное включение $T_1 \subset T_2$ (или $T_2 \supset T_1$). Разбиение T_2 называется* **измельчением** *разбиения T_1.*

Очевидно, справедливы следующие свойства.

1^0. Всякое разбиение есть измельчение самого себя.

2^0. Если $T_3 = T_1 \cup T_2$, то разбиение T_3 есть измельчение и разбиения T_1, и разбиения T_2.

Для любого разбиения $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ через Δ_k обозначим отрезок вида $[x_{k-1}, x_k]$. Длину этого отрезка обозначим так:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Определение 3. *Величина* $\Delta_T = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ *называется* **диаметром разбиения** T.

На каждом из отрезков Δ_k выберем точку ξ_k, $k = 1, \ldots, n$, т.е.

$$x_{k-1} \le \xi_k \le x_k.$$

Определение 4. *Совокупность точек* $\{x_0, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *называется* **размеченным разбиением** *отрезка* $[a, b]$.

Обозначим его через V, а соответствующее ему неразмеченное разбиение — через $T = T(V)$.

Определение 5. *Сумма*

$$\sigma(V) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется **интегральной суммой функции** $f(x)$, *соответствующей размеченному разбиению* V.

Определение 6. *Число* I *называется* **определенным интегралом (Римана)** *от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *если для всякого* $\epsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *такое, что для любого размеченного разбиения* V *отрезка* $[a, b]$ *с условием* $\Delta_V < \delta$ *справедливо неравенство*

$$|I - \sigma(V)| < \varepsilon,$$

т.е.

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k| < \varepsilon.$$

Для интеграла I используют обозначение

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Определение 7. *Функция* $f(x)$, *для которой существует интеграл Римана, называется* **интегрируемой (по Риману)** *на отрезке* $[a, b]$.

Легко доказать следующее утверждение. Если существуют два числа I_1 и I_2, удовлетворяющие определению интеграла Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то они совпадают, т.е. $I_1 = I_2$.

Действительно, если, например, $I_1 < I_2$, то в качестве величины ε возьмем число, равное $\frac{1}{2}(I_2 - I_1)$. Тогда в силу определения интеграла существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta$ имеем

$$|\sigma_V - I_1| < \varepsilon, \ |\sigma_V - I_2| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$I_2 - I_1 = |I_2 - I_1| \leq |I_2 - \sigma_V| + |\sigma_V - I_1| < 2\varepsilon = I_2 - I_1.$$

Отсюда получим $I_2 - I_1 < I_2 - I_1$, что невозможно, так что имеем $I_1 = I_2$. Утверждение доказано.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно рассматривать как предел по некоторой базе. Определим эту базу, т.е. опишем множество окончаний, из которых она состоит.

Напомним определение базы B подмножеств b основного множества A. Окончания $b \subset A$ базы B, т.е. ее элементы, удовлетворяют следующим условиям:

1) пустое множество не является окончанием базы;

2) для любых двух окончаний b_1, b_2 базы B найдется окончание $b_3 \in B$ с условием $b_3 \subset b_1 \cap b_2$.

В качестве основного множества A возьмем множество всех размеченных разбиений отрезка $[a, b]$. Для каждого $\delta > 0$ рассмотрим множество $b_\delta \subset A$, состоящее изо всех размеченных разбиений с диаметром Δ_V меньшим, чем δ, т.е. $\Delta_V < \delta$. Совокупность множеств $\{b_\delta\}$ и будет искомой базой. Интегральная сумма $\sigma(V)$ является функцией, определенной на множестве A размеченных разбиений V. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ оказывается не чем иным, как пределом интегральных сумм $\sigma(V)$ по базе B, т.е.

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_B \sigma(V).$$

Напомним, что это равенство означает следующее: для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует окончание $b_\delta = b_\delta(\varepsilon)$ базы B, такое, что для любого размеченного разбиения $V \in b_\delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|\sigma(V) - I| < \varepsilon.$$

Отметим, что в предыдущем определении интеграла в качестве $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ надо взять величину δ, которая порождает окончание $b_\delta(\varepsilon)$.

Так как интеграл — это предел интегральных сумм по базе B, то к нему применимы теоремы о пределе функции по базе множеств.

Докажем следующее важное свойство интегрируемых функций.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на нем.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Возьмем любое разбиение $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ этого отрезка такое, что $\Delta_T < \delta$. Тогда существует отрезок $\Delta_r = [x_{r-1}, x_r]$, на котором функция $f(x)$ не ограничена. Покажем, что $\sigma(V)$ не ограничена. Возьмем любое число $M > 0$. Построим разметку V разбиения T такую, что $|\sigma(V)| > M$. С этой целью точки $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n$ возьмем произвольно. Положим

$$A = \left| \sum_{k=1, k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right|.$$

Поскольку функция $f(x)$ не ограничена на отрезке Δ_r, существует точка $\xi_r \in \Delta_r$ такая, что

$$|f(\xi_r)| > \frac{M + A}{\Delta x_r}.$$

Отсюда имеем

$$|\sigma(V)| \geq |f(\xi_r)\Delta x_r| - \left| \sum_{k=1, k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| > \frac{M + A}{\Delta x_r}\Delta x_r - A = M,$$

следовательно, $\sigma(V)$ не ограничена, т.е. функция $f(x)$ — не интегрируема. Теорема 2 доказана.

Лекция 2

§ 3. КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Установим критерий интегрируемости по Риману функции, ограниченной на отрезке.

Определение 1. Верхней суммой Дарбу *функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *отвечающей разбиению* $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$, *называется сумма*

$$S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

где $M_k = \sup\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$, Δ_k *— отрезок* $[x_{k-1}, x_k]$, *а* Δx_k *— его длина.*
Нижней суммой Дарбу *называется сумма*

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k,$$

где $m_k = \inf\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$.

Определение 2. *Число* $I^* = \inf\limits_{T \in A'} S(T)$ *называется* **верхним интегралом**, *а число* $I_* = \sup\limits_{T \in A'} s(T)$ — **нижним интегралом** *от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *где* A' *— множество всех разбиений* $[a, b]$.

Теорема 1. (Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке). *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема на отрезке, небходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{\Delta_T \to 0} (S(T) - s(T)) = 0.$$

Для доказательства этого критерия нам потребуются следующие свойства верхних и нижних сумм Дарбу.

Лемма 1. *Для любого размеченного разбиения* V *имеем*

$$s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V)).$$

Лемма 2. *Пусть* T_0 *— любое фиксированное разбиение и* $\alpha(T_0)$ *— множество разметок этого разбиения. Тогда*

$$s(T_0) = \inf_{V \in \alpha(T_0)} \sigma(V), \; S(T_0) = \sup_{V \in \alpha(T_0)} \sigma(V).$$

Л е м м а 3. *Для любых неразмеченных разбиений T_1 и T_2 имеем*

$$s(T_1) \le S(T_2).$$

Л е м м а 4. *Для ограниченной функции верхний и нижний интегралы I^* и I_* существуют, причем для любого разбиения T справедливы неравенства*

$$s(T) \le I_* \le I^* \le S(T).$$

Л е м м а 5. *Диаметры размеченного разбиения V и отвечающего ему неразмеченного разбиения $T = T(V)$ совпадают, поэтому если $V \in b'_\delta$, то $T(V) \in b_\delta$. Здесь b'_δ — окончание базы размеченных разбиений и b_δ — окончание базы неразмеченных разбиений, отвечающие числу δ.*

Л е м м а 6. *Для любого разбиения T имеем*

$$I^* - I_* \le S(T) - s(T) = \Omega(T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этих утверждений не представляет большого труда. Поэтому докажем только леммы 3, 4 и 6. Начнем с леммы 3. Отметим, что при измельчении разбиения T нижняя сумма Дарбу $s(T)$ может разве что возрасти, а верхняя сумма $S(T)$ разве что уменьшиться, а потому возьмем разбиение $T_3 = T_1 \cup T_2$ и получим, что

$$s(T_1) \le s(T_3) \le S(T_3) \le S(T_2).$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4 по существу вытекает из леммы 3. Если мы образуем числовое множество M_1 всех значений величин $s(T)$ и множество M_2 всех значений $S(T)$, то утверждение леммы 3 означает, что любой элемент $a \in M_2$ есть верхняя грань для множества M_1. Но тогда наименьшая верхняя грань множества M_1, т.е. величина I_*, не превосходит a. А это означает, что I_* — нижняя грань множества M_2, а по своему определению I^* есть точная нижняя грань множества M_2, поэтому имеем

$$s(T) \le I_* \le I^* \le S(T).$$

Лемма 4 доказана.

Утверждение леммы 6 следует из цепочки неравенств

$$S(T) - s(T) \ge I^* - s(T) \ge I^* - I_*.$$

Утверждение остальных трех лемм непосредственно следуют из определений.

Теперь можно перейти к доказательству критерия интегрируемости функции по Риману.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. Это значит, что для любого числа $\varepsilon_1 > 0$ найдется число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V с диаметром $\Delta_V < \delta_1$ имеем $|\sigma(V) - I| < \varepsilon_1$, т.е.

$$I - \varepsilon_1 < \sigma(V) < I + \varepsilon_1. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольное неразмеченное разбиение T с условием $\Delta_T < \delta_1$. Имеем

$$s(T) = \inf_{V \in \alpha(T)} \sigma(V), \; S(T) = \sup_{V \in \alpha(T)} \sigma(V).$$

Тогда из (1) вытекает, что

$$I - \varepsilon_1 \le s(T) \le I + \varepsilon_1, \; I - \varepsilon_1 \le S(T) \le I + \varepsilon_1.$$

Следовательно, числа $s(T)$ и $S(T)$ лежат на одном отрезке $[I - \varepsilon_1, I + \varepsilon_1]$ длины $2\varepsilon_1$, т.е.

$$|S(T) - s(T)| \le 2\varepsilon_1.$$

Если мы возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$ и $\delta = \delta_1(\varepsilon/3)$, то получим, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всякого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta(\varepsilon)$ имеем неравенство $|S(T) - s(T)| < \varepsilon$, т.е.

$$\lim_{\Delta_T \to 0} (S(T) - s(T)) = 0.$$

Необходимость утверждения доказана.

Достаточность. Докажем, что из условия $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} (S(T) - s(T)) = 0$ следует существование предела $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$.

Сначала убедимся, что верхний и нижний интегралы I^* и I_* равны между собой. В силу леммы 6 имеем

$$0 \le I^* - I_* \le S(T) - s(T).$$

Следовательно, при $\Delta_T \to 0$ получим $h = I^* - I_* \to 0$, т.е. $h = 0$ и

$$I^* = I_* = I.$$

Осталось доказать, что $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta$ выполняется неравенство

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Но тогда для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta$ имеем
$$S(T(V)) - s(T(V)) < \varepsilon,$$
и, кроме того,
$$s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V)), \ s(T(V)) \le I \le S(T(V)),$$
т.е. обе точки $\sigma(V)$ и I лежат на отрезке $[s(T(V)), S(T(V))]$, длина которого меньше ε, но это значит, что расстояние между любыми точками его меньше, чем ε. Другими словами, для любого разбиения V с условием $\Delta_V < \delta$ справедливо неравенство $|\sigma(V) - I| < \varepsilon$, т.е. имеем $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. Теорема 1 доказана полностью.

Замечание. При доказательстве достаточности в критерии интегрируемости установлена справедливость следующего утверждения.

Пусть для ограниченной функции выполняется условие
$$\lim_{\Delta_T \to 0}(S(T) - s(T)) = 0.$$
Тогда имеет место равенство $I^* = I_*$.

Примеры. 1. Функция Дирихле
$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \ \text{— рациональное число}, \\ 0, & \text{если} \quad x \ \text{— иррациональное число}, \end{cases}$$
не является интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$.

Действительно, возьмем любое разбиение T этого отрезка. На любом промежутке Δ_i разбиения T содержатся как рациональные точки, так и иррациональные, поэтому колебание ω_i функции на этом промежутке равно 1. Следовательно,
$$\Omega(T) = S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a.$$
Но по критерию интегрируемости функции по Риману должно выполняться условие
$$\lim_{\Delta_T \to 0}(S(T) - s(T)) = 0.$$
Значит, функция Дирихле $D(x)$ неинтегрируема по Риману.

2. Функция Римана
$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если} \quad x = \frac{m}{n}, \ (m, n) = 1, \\ 0, & \text{если} \quad x \ \text{— иррациональное число}, \end{cases}$$
интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Положим число N, равным величине

$$N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$$

и возьмем число δ из условия $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2N^2}$. Возьмем теперь любое разбиение T с условием $\Delta_T < \delta$. Колебание ω_i функции $R(x)$ на любом промежутке Δ_i удовлетворяет условию $0 < \omega_i \le 1$. Представим сумму $\Omega(T) = S(T) - s(T)$ в виде суммы двух слагаемых Ω_1 и Ω_2 в соответствии с тем, что выполняется неравенство $0 < \omega_i \le \frac{1}{N}$ и $\frac{1}{N} < \omega_i \le 1$. В сумму Ω_2 входят промежутки Δ_i, содержащие рациональные точки со знаменателем, меньшим, чем N. Количество таких точек не превосходит N^2. Поэтому получим

$$\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2 \le \frac{1}{N} \sum{}' \Delta x_i + \sum{}'' \Delta x_i \le \frac{1}{N} + \delta N^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

где штрих и два штриха в знаке суммы означают, что промежутки Δ_i входят соответственно в суммы Ω_1 и Ω_2.

Следовательно, функция Римана $R(x)$ интегрируема.

Лекция 3

§ 4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТРЕХ УСЛОВИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Докажем критерий интегрируемости функции по Риману в трех эквивалентных формах.

Т е о р е м а 1. *Для интегрируемости ограниченной на отрезке функции необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из трех эквивалентных условий:*

1) $\lim\limits_{\Delta_T \to 0}(S(T) - s(T)) = 0$,

2) $I^* = I_*$,

3) $\inf\limits_T (S(T) - s(T)) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем, что имеет место следующая цепочка заключений: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1), откуда и следует искомая эквивалентность.

В силу замечания к теореме 1 §3 получим, что из 1) $\Rightarrow$ 2).

Докажем, что из 2) $\Rightarrow$ 3). Справедливо следующее соотношение:

$$\inf_T (S(T) - s(T)) = h = I^* - I_*.$$

а) Сначала покажем, что h является нижней гранью множества $S(T) - s(T)$. Имеем

$$I^* \le S(T), \; -I_* \le -s(T).$$

Следовательно,

$$S(T) - s(T) \ge I^* - I_*.$$

б) Докажем теперь, что величина h является точной нижней гранью множества $S(T) - s(T)$, т.е., что для любого $\varepsilon > 0$ число $h + \varepsilon$ не является нижней гранью. Из определения верхнего и нижнего интегралов следует, что найдутся разбиения T_1 и T_2 такие, что

$$S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \; s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда для разбиения $T_3 = T_1 \cup T_2$ имеем

$$S(T_3) \le S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \; s(T_3) \ge s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$S(T_3) - s(T_3) < I^* - I_* + \varepsilon = h + \varepsilon,$$

т.е. $h+\varepsilon$ действительно не является нижней гранью множества значений $S(T)-s(T)$.

Так как утверждение 2) состоит в том, что $h=0$, то из доказанного выше имеем $\inf\limits_T(S(T)-s(T))=0$. Таким образом, из утверждения 2) мы вывели утверждение 3).

Докажем теперь, что из 3) $\Rightarrow$ 1). В силу условия 3) имеем, что для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение T_1 такое, что $S(T_1)-s(T_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через n число точек разбиения T_1. В силу ограниченности на отрезке функции $f(x)$ существует число $M>0$ такое, что для всех точек x из этого отрезка имеем $|f(x)|<M$. Положим $\delta=\frac{\varepsilon}{4nM}$. Далее возьмем любое разбиение T с условием $\Delta_T<\delta$. Тогда для разбиения $T_2=T\cup T_1$ имеем

$$S(T_2)-s(T_2)\le S(T_1)-s(T_1)<\frac{\varepsilon}{2},$$

или, что то же самое, $\Omega(T_2)\le\Omega(T_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, имеем $\Omega(T_2)\le\Omega(T)$.

Оценим сверху величину $\Omega(T)$. Поскольку

$$\Omega(T)=\Omega(T_2)+(\Omega(T)-\Omega(T_2)),$$

достаточно оценить $\Omega(T)-\Omega(T_2)$. Разбиение T_2 является измельчением разбиения T и получается из него так, что на некоторые промежутки разбиения T добавляются точки разбиения T_1. Количество таких промежутков не превосходит n, длина каждого из них меньше δ, а колебание функции $f(x)$ на этих промежутках не превосходит $2M$. Следовательно, $\Omega(T)-\Omega(T_2)\le 2Mn\delta$.

Таким образом, получим

$$\Omega(T)<\frac{\varepsilon}{2}+2Mn\delta=\varepsilon.$$

А это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\frac{\varepsilon}{4Mn}$ такое, что для любого разбиения T с условием $\Delta_T<\delta$ выполняется неравенство $\Omega(T)<\varepsilon$, т.е.

$$\lim_{\Delta_T\to 0}(S(T)-s(T))=0.$$

Теорема 1 доказана полностью.

§ 5. СПЕЦИАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Верхнюю (соответственно нижнюю) сумму Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, отвечающую разбиению T_n отрезка $[a,b]$ на n равных частей, обозначим через S_n (соответственно s_n).

Докажем следующий специальный критерий интегрируемости функции по Риману.

Т е о р е м а 1. *Для интегрируемости ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из критерия Римана (теорема 1 §4).

Достаточность. Пусть

$$I^* = \inf_T S(T), \; I_* = \sup_T s(T).$$

Тогда для любого разбиения T будем иметь

$$s(T) \le I_* \le I^* \le S(T).$$

Следовательно,

$$s_n \le I_* \le I^* \le S_n.$$

Отсюда получим

$$S_n - s_n \ge I^* - I_* \ge 0.$$

Но поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$, то $I^* = I_* = I$, и в силу теоремы 2 §4 (условие 2) функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Теорема 1 доказана полностью.

С л е д с т в и е. *Для интегрируемости ограниченной функции на отрезке необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:*

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0,$

5) $\inf\limits_n(S_n - s_n) = 0.$

Условия 4) и 5) дополняют условия 1),2) и 3) теоремы 2 §4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, имеем цепочку заключений

$$5) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5).$$

Следствие доказано.

Пример. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $0 \le x_n < 1$. Пусть α и β — любые числа с условием $0 \le \alpha \le \beta \le 1$. Обозначим через N_Q количество членов последовательности $\{x_k\}$, $1 \le k \le Q$, попадающих на отрезок $[\alpha,\beta]$, т.е. $\alpha \le x_k \le \beta$, $1 \le k \le Q$.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ **равномерно распределена по модулю единица** (р.р. (mod 1)), если выполняется соотношение

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{N_Q}{Q} = \beta - \alpha.$$

Докажем следующий критерий равномерной распределенности, принадлежащий Г.Вейлю.

Т е о р е м а 2. (Критерий Г.Вейля). *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была равномерно распределена по модулю единица, необходимо и достаточно, чтобы для любой интегрируемой по Риману функции $f(x)$ имело место равенство*

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q} f(x_r) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Периодическая функция $f(x)$ с периодом 1,

$$f(x) = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha \le x \le \beta, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0,1]$.

Кроме того, имеем

$$N_Q = \sum_{i=1}^{Q}\varphi(x_i), \quad \int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx = \beta - \alpha.$$

Следовательно,

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{N_Q}{Q} = \beta - \alpha,$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю единица. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $f(x)$ — произвольная интегрируемая по Риману функция на отрезке $[0,1]$. Тогда в силу критерия интегрируемости для любого $\epsilon > 0$ существует разбиение T, такое, что

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) < \frac{\epsilon}{3}, \; s(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, S(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Очевидно, справедливо неравенство

$$s(T) \le \int\limits_0^1 f(x)\,dx \le S(T).$$

Положим

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \Delta_i, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \Delta_i, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_i(x), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i \varphi_i(x).$$

Заметим, что если равенство (1) выполняется для некоторых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$, то оно справедливо и для функции $g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_r f_r(x)$. Поэтому, исходя из определения равномерной распределенности, получим:

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \varphi(x_r) = \int_0^1 \varphi(x)\, dx = s(T),$$

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \Phi(x_r) = \int_0^1 \Phi(x)\, dx = S(T).$$

Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $Q_0 = Q_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $Q > Q_0$ имеем

$$\left| s(T) - \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \varphi(x_r) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| S(T) - \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \Phi(x_r) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

Далее, поскольку имеет место неравенство $\varphi(x) \le f(x) \le \Phi(x)$,

$$s(T) - \frac{\varepsilon}{3} \le \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \varphi(x_r) \le \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} f(x_r) \le \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \Phi(x_r) \le S(T) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, как $\frac{1}{Q} \sum\limits_{r=1}^{Q} f(x_r)$, так и значение интеграла $\int\limits_0^1 f(x)\, dx$ принадлежат отрезку $[s(T) - \frac{\varepsilon}{3}, S(T) + \frac{\varepsilon}{3}]$. Поэтому имеем

$$\left| \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} f(x_r) - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \le \Omega(T) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Теорема 2 доказана полностью.

§ 6. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ

Метод интегральных сумм основан на следующей лемме.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, и пусть $\{V_n\}$ — любая последовательность размеченных разбиений с условием, что последовательность диаметров разбиений $\{\Delta_{V_n}\} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$ имеем:*

$$\text{а)} S_n = S(T(V_n)) \to I;\ \text{б)} s_n = s(T(V_n)) \to I;\ \text{в)} \sigma_n = \sigma(V_n) \to I.$$

Доказательство. По определению интеграла и по критерию интегрируемости функции по Риману для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\Delta_{V_n} = \Delta_{T(V_n)} < \delta$, то имеем

$$|\sigma_n - I| < \frac{\varepsilon}{2},\ |S_n - I| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ |s_n - I| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Но так как последовательность $\{\Delta_{V_n}\}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то вне соответствующей δ-окрестности нуля лежит не более конечного числа $n_0(\delta)$ значений Δ_{V_n}. Поэтому вне ε-окрестности числа I тоже лежит не более, чем $n_0(\delta)$ значений величин σ_n, S_n, s_n. Следовательно,

$$I = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Лемма доказана.

Примеры. 1. Имеем $\int\limits_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$.

Поскольку функция e^x непрерывна на отрезке $[a,b]$, она интегрируема на нем. Для того чтобы найти значение интеграла, остается только выбрать последовательность $\{V_n\}$ и вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$. Положим при $k = 0,\dots,n$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ \xi_k = x_{k-1},\ \Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \Delta,\ x_k = a + k\Delta.$$

Отсюда имеем

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{a+k\Delta}\cdot\Delta = \Delta e^a(1 + e^\Delta + \dots + e^{(n-1)\Delta}) =$$

$$= \Delta e^a \frac{1-e^{n\Delta}}{1-e^\Delta} = \frac{\Delta}{e^\Delta - 1}\cdot(e^b - e^a).$$