подпоследовательность s_{2^k} не ограничена и потому она расходится, как и сам гармонический ряд.

Для доказательства сходимости ряда $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ по теореме Вейерштрасса достаточно доказать ограниченность его частичных сумм

$$t_n = 1 + 1/2^\alpha + \dots + 1/n^\alpha,$$

поскольку они монотонно возрастают. Рассмотрим какое-либо k с условием $n < 2^k$. Тогда справедлива следующая оценка

$$t_n < t_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{2^{k\alpha}}\right) \le$$

$$\le 1 + 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{(2^{(k-1)\alpha}} + \dots + \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}\right) \le$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2^\alpha} + 2 \cdot \frac{1}{2^{2\alpha}} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} \le 1 + \frac{1}{1 - 2^{\alpha-1}}.$$

Таким образом, частичные суммы $\{t_n\}$ ограничены в совокупности, что и означает сходимость искомого ряда.

Установим теперь несколько простейших свойств сходящихся рядов.

Утверждение 2. *Отбрасывание любого конечного числа членов в бесконечной сумме или добавление к ней любого конечного числа новых слагаемых не влияет на сходимость ряда.*

Доказательство. Рассмотрим случай отбрасывания слагаемых, так как второй случай разбирается аналогично. Итак, пусть мы отбросили члены ряда $\sum a_n$ с номерами $n_1 < \dots < n_k$. Оставшиеся слагаемые перенумеруем в порядке возрастания их прежних номеров. Общий член получившейся таким образом последовательности обозначим через b_n. Тогда при любом $m > n_k$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m-k} b_n + a_{n_1} + \dots + a_{n_k}.$$

Отсюда следует, что последовательности частичных сумм этих рядов $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ и $s'_m = \sum\limits_{n=1}^{m-k} b_n = s_m - a_{n_1} - \dots - a_{n_k}$ сходятся и расходятся одновременно. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Если* $\sum a_n = s$ *и* $c \in \mathbb{R}$, *то* $\sum ca_n = cs$.

Утверждение 4. *Если* $\sum a_n = s$ *и* $\sum b_n = t$, *то* $\sum(a_n + b_n) = s + t$.

Доказательство утверждений 3 и 4 есть прямое следствие определения суммы ряда и арифметических свойств сходящихся последовательностей s_n и t_n как частичных сумм рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Доказательство закончено.

Утверждение 5 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Другими словами,* a_n *есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Имеем $a_n = s_n - s_{n-1}$. Отсюда при $n \to \infty$ получим $a_n \to s - s = 0$, что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится, так как $a_n = (-1)^{n-1}$ не стремится к нулю. Заметим, что Л. Эйлер приписывал этому ряду сумму, равную 1/2. И хотя в рамках наших определений это неверно, существует иной, более общий взгляд на проблему, и он позволяет придать утверждению Эйлера строгий математический смысл. Речь идет о корректной и продуктивной постановке задачи суммирования расходящихся рядов. Например, можно сумму расходящегося ряда рассматривать как значение особого линейного функционала, определенного на последовательности $\{a_n\}$, и т.п. Однако здесь мы этих вопросов, по существу, касаться не будем.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ расходится. Чтобы доказать это утверждение, достаточно установить, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$ не имеет места. Действительно, пусть $\sin n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, так как

$$\sin n = \sin((n-1)+1) = \sin(n-1)\cos 1 + \sin 1 \cos(n-1),$$

$$\sin 1 \neq 0, \cos 1 \neq 0,$$

то, переходя к пределу в предыдущем равенстве, получим

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sin n = \cos 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin(n-1) + \sin 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \cos(n-1) =$$

$$= 0 + \sin 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \cos(n-1).$$

Отсюда имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n-1) = 0$. Но тогда при $n \to \infty$

$$1 = (\sin n)^2 + (\cos n)^2 \to 0 + 0 = 0,$$

что невозможно. Следовательно, ряд $\sum \sin n$ расходится, что и требовалось доказать.

Рассмотренные примеры показывают, что даже простейшие признаки сходимости ряда оказываются полезными при исследовании рядов на сходимость. С другой стороны, наличие общего критерия Коши для сходимости последовательности позволяет установить соответствующий критерий и для числового ряда.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при всяком натуральном p и всех $n > n_0(\varepsilon)$ имело место неравенство*

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно критерию Коши для сходимости последовательности s_n частичных сумм ряда, что согласно определению и есть сходимость его самого. Тем самым теорема 1 доказана.

Теорему 1 можно переформулировать таким образом, чтобы иметь критерий расходимости ряда $\sum a_n$ в прямой форме.

Теорема 2 (критерий Коши для расходимости ряда). *Для расходимости ряда $\sum a_n$ необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно $\varepsilon > 0$ с условием, что для любого $n_0 \geq 1$ найдутся натуральные $n > n_0$ и p, для которых справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \geq \varepsilon.$$

Определение 5. *Всякое выражение вида* $s_{n+p} - s_n = \sum\limits_{m=n+1}^{n+p} a_m$ *называется* **отрезком ряда** $\sum a_n$.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ сходится.

Для доказательства воспользуемся теоремой 1. Имеем

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Требуемое неравенство $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ будет выполнено, если, например, $1/n < \varepsilon$, т.е. $n > 1/\varepsilon$. Положим $n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда $n_0(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ и для любого натурального p и любого $n > n_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$1/n < 1/n_0(\varepsilon) < \varepsilon, \quad |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon,$$

следовательно, по теореме 1 ряд сходится.

2. Гармонический ряд $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ расходится. Применим теорему 2. При всех n и $p = n$ имеем

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, условия теоремы 2 будут выполнены, если положить $\varepsilon = 1/2$ и при любом $n_0 \geq 1$ в качестве n и p взять числа $n = p = n_0$. Тем самым расходимость ряда установлена.

3. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{2 \ln 2} + \dots + \frac{1}{n \ln n} + \dots$$

расходится. Действительно, при любом натуральном k имеем

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n \ln n} \geq \frac{2^k}{2^{k+1}(k+1)\ln 2} = \frac{1}{2(k+1)\ln 2}.$$

Следовательно, при $k \geq 1$ получим

$$s_{2^{2k}} - s_{2^k} \geq \frac{1}{2(k+1)\ln 2} + \dots + \frac{1}{4k \ln 2} > \frac{k}{4k \ln 2} = \frac{1}{4 \ln 2}.$$

Положим $\varepsilon = 1/(4 \ln 2)$. Тогда, если в качестве n и $n+p$ взять числа $n = 2^k$ и $n + p = 2^{2k}$, то при любом $k \geq 1$ выполняются условия теоремы 2, и, значит, данный ряд расходится.

Обратим еще раз внимание на тесную связь между теорией сходимости рядов и последовательностей. Мы установили, что всякий ряд порождает последовательность частичных сумм, которая определяет его сходимость. Имеет место и обратный результат, а именно: всякую последовательность можно рассматривать как последовательность частичных сумм некоторого ряда. Действительно, если $\{b_n\}$ — некоторая последовательность, то с ней можно связать ряд $\sum a_n$, полагая $a_1 = b_1$ и $a_{n+1} = b_{n+1} - b_n$ при $n \geq 1$.

Лекция 2

§ 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Определение 1. *Ряд* $\sum a_n$ *называется* **рядом с неотрицательными членами,** *если при всех* n *имеем* $a_n \geq 0$.

Ряды с неотрицательными членами — это простейший тип числовых рядов. Их свойства используют при изучении рядов общего вида, и поэтому изложение теории рядов обычно начинают именно с рядов с неотрицательными членами. Для общего члена такого ряда будем преимущественно использовать обозначение p_n (вместо a_n). В основном нас будут интересовать вопросы сходимости этих рядов.

Теорема 1. *Для сходимости ряда* $\sum p_n$, *где* $p_n \geq 0$ *при всех* n, *необходима и достаточна ограниченность последовательности его частичных сумм.*

Доказательство. Пусть s_n — n-я частичная сумма ряда $\sum p_n$. Поскольку $p_n \geq 0$, имеем, что последовательность $\{s_n\}$ не убывает. Теперь требуемый результат вытекает из критерия Вейерштрасса для сходимости монотонной последовательности. Доказательство закончено.

Пример. Пусть $b_n \to +\infty$ и $\{b_n\}$ не убывает и положительна. Тогда ряд $\sum(b_{n+1} - b_n)$ расходится, а ряд $\sum\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$ сходится.

Действительно, для частичных сумм s_n и t_n этих рядов имеем

$$s_n = b_{n+1} - b_n \to +\infty,\ t_n = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} < \frac{1}{b_1}.$$

Теперь требуемый результат вытекает из теоремы 1.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть* $\sum p_n$ *и* $\sum q_n$ *— два ряда с неотрицательными членами и пусть, начиная с некоторого* n_0, *для всех* $n \geq n_0$ *имеем* $0 \leq q_n \leq p_n$. *Тогда:*

а) сходимость ряда $\sum p_n$ *влечет за собой сходимость ряда* $\sum q_n$;

б) из расходимости ряда $\sum q_n$ *следует расходимость ряда* $\sum p_n$.

Доказательство. Без нарушения сходимости можно отбросить первые n_0 членов каждого ряда. При всех $n > n_0$ полагаем

$$s_n = \sum_{m=n_0+1}^{n} p_m,\ t_n = \sum_{m=n_0+1}^{n} q_m.$$

Тогда для любого $n > n_0$ имеем $0 \le t_n \le s_n$. В случае а) последовательность $\{s_n\}$ ограничена, следовательно, и $\{t_n\}$ тоже ограничена и ряд $\sum q_n$ сходится. В случае б) последовательность $t_n \to +\infty$, поэтому $s_n \to +\infty$, т.е. ряд $\sum p_n$ расходится. Теорема доказана.

Определение 2. *Ряд $\sum p_n$ в теореме 2 называется* **мажорантой** *для ряда $\sum q_n$, а ряд $\sum q_n$ —* **минорантой** *для ряда $\sum p_n$. Говорят еще, что ряд $\sum p_n$* **мажорирует** *ряд $\sum q_n$, а последний, в свою очередь, его* **минорирует**.

Аналогичное определение имеет место и для неотрицательных числовых последовательностей.

Схема применения признака сравнения состоит в подборе подходящей мажоранты для доказательства сходимости ряда или миноранты для доказательства его расходимости. Обычно в качестве мажоранты и миноранты используются ряды с общим членом более простого вида, чем у исходного ряда, либо ряды общеизвестные, например гармонический ряд, геометрическая прогрессия и т.д.

Пример. *(Признак разрежения Коши).* Если последовательность $p_n \ge 0$ не возрастает, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k p_{2^k}$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Поскольку $p_n \ge 0$, последовательность частичных сумм ряда $\sum p_n$ не убывает, а любая ее подпоследовательность s_{n_k} сходится и расходится одновременно с s_n. Далее, для любого натурального n найдется целое число k с условием $2^{k-1} < n \le 2^k$. Для таких n и k определим последовательность $b_n = p_{2^k}$. Тогда согласно условию выполнены неравенства

$$b_n = p_{2^k} \le p_n \le p_{2^{k-1}} = b_{2^{k-1}},$$

$$2^{k-1}p_{2^k} \le p_{2^{k-1}+1} + \dots + p_{2^k} \le 2^{k-1}p_{2^{k-1}}.$$

Следовательно, для частичных сумм $\sigma_{2^{k-1}}$ и σ_{2^k} ряда $\sum b_n$ имеем

$$\sigma_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} b_n = \sum_{m=1}^{k} 2^{m-1}p_{2^m} \le \sum_{n=1}^{2^k} p_n =$$

$$= s_{2^k} \le 2\sum_{n=1}^{2^{k-1}} b_n = \sum_{m=1}^{2^{k-1}} 2^m p_{2^m} = 2\sigma_{2^{k-1}}.$$

Это значит, что σ_{2^k} является минорантой, а $2\sigma_{2^{k-1}}$ — мажорантой для s_{2^k}. Таким образом, ряды $\sum p_n$ и $\sum 2^k p_{2^k}$ сходятся и расходятся одновременно, что и утверждалось выше.

Идея, заложенная в признаке сравнения, позволяет вывести и некоторые другие полезные утверждения подобного рода. Следующая теорема относится к их числу.

Т е о р е м а 3 (обобщенный признак сравнения). *Если в условии теоремы 2 неравенство $q_n \le p_n$ заменить неравенством $\frac{q_{n+1}}{q_n} \le \frac{p_{n+1}}{p_n}$, то ее утверждение также будет иметь место.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку отбрасывание нескольких первых членов ряда не влияет на его сходимость, с самого начала можно считать, что $n_0 = 1$. Перемножая все неравенства из условия теоремы до номера n включительно, приходим к неравенствам вида

$$\frac{q_n}{q_1} \le \frac{p_n}{p_1}, \quad q_n p_1 \le p_n q_1.$$

Применяя теорему 2, мы получаем требуемый результат относительно рядов $p_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ и $q_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_n$, а так как умножение всех членов ряда на одно и то же число, отличное от нуля, не влияет на сходимость, то тем самым теорема 3 доказана полностью.

Т е о р е м а 4 (признак Даламбера). *Пусть для членов ряда $\sum p_n$, начиная с некоторого номера n_0, выполнены условия:*

1) $p_n > 0$;

2) $D_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} \le q$, где $0 < q < 1$.

Тогда ряд $\sum p_n$ сходится. Если же при всех $n \ge n_0$ вместо неравенства 2 имеем $p_{n+1}/p_n \ge 1$, то ряд $\sum p_n$ расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравним ряд $\sum p_n$ со сходящимся рядом $\sum b_n$, где $b_n = q^n$. При $n \ge n_0$ имеем

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \le q = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Поэтому первое утверждение теоремы 4 вытекает из теоремы 3.

Во втором случае надо положить $b_n = 1$ для всех n. Тогда ввиду расходимости ряда $\sum b_n$ и неравенств

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge 1 = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

из той же теоремы 3 следует расходимость ряда $\sum p_n$. Теорема 4 доказана полностью.

Т е о р е м а 5 (признак Даламбера в предельной форме). *Рассмотрим ряд* $\sum p_n$ *с условием* $p_n > 0$ *для всех* n. *Положим*

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}, \quad r = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

Тогда при $q < 1$ *ряд* $\sum p_n$ *сходится, а при* $r > 1$ *— расходится.*

Напомним, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{m\in N} \sup_{\substack{n \\ n\ge m}} a_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup_{m\in N} \inf_{\substack{n \\ n\ge m}} a_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала первый случай. Положим $q_1 = \frac{q+1}{2}$. Тогда $q < q_1 < 1$. Поскольку $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n} = q$, при некотором n_0 имеем

$$\sup_{\substack{n \\ n\ge n_0}} \frac{p_{n+1}}{p_n} < q_1 = \frac{q+1}{2} = q + \frac{1-q}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum p_n$ сходится в силу первого утверждения теоремы 4.

Рассмотрим теперь второй случай. Положим $r_1 = \frac{r+1}{2}$. Тогда имеем $r > r_1 > 1$. Поскольку $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n} = r$, при некотором n_1 имеем оценку

$$\inf_{\substack{n \\ n\ge n_1}} \frac{p_{n+1}}{p_n} > r_1 = \frac{r+1}{2} = 1 + \frac{r-1}{2} > 1.$$

Тем самым ряд $\sum p_n$ расходится по второму утверждению теоремы 4. Теорема 5 доказана полностью.

Замечание. При $q = 1$ вопрос о сходимости ряда $\sum p_n$ в теоремах 4 и 5 остается открытым. Для примера можно указать на ряды $\sum 1/n^2$ и $\sum 1/n$, один из которых сходится, а второй — расходится, но в обоих случаях имеем $q = 1$. Для исследования сходимости подобных рядов требуются более "тонкие" признаки, которые будут рассмотрены позже.

Несколько более тонкий признак дает следующая теорема.

Т е о р е м а 6 (признак Коши). *Если для членов ряда* $\sum p_n$ *с условием* $p_n \ge 0$, *начиная с некоторого номера* n_0, *имеет место неравенство* $p_n^{1/n} \le q$, *где число* $q < 1$ *и фиксировано, то ряд* $\sum p_n$ *сходится.*

Если же для бесконечно многих n имеем $p_n^{1/n} \geq 1$, то этот ряд расходится.

Доказательство. Рассмотрим сначала первый случай. Последовательно имеем $p_n^{1/n} \leq q$, $p_n \leq q^n$, и так как $q < 1$, то ряд $\sum p_n$ сходится по признаку сравнения вместе с рядом $\sum q^n$.

Во втором случае для бесконечного количества значений n имеем $p_n^{1/n} \geq 1$, $p_n \geq 1$. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \neq 0$ и ряд $\sum p_n$ расходится, поскольку условие необходимого признака сходимости ряда ($p_n \to 0$ при $n \to \infty$) не выполняется. Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (признак Коши в предельной форме). *Пусть*

$$\varlimsup_{n\to\infty} p_n^{1/n} = q,$$

где $p_n \geq 0$ при всех n.

Тогда при $q < 1$ ряд $\sum p_n$ сходится, а при $q > 1$ — расходится.

Доказательство. Положим сначала $q_1 = \frac{q+1}{2}$ и допустим, что $q < 1$. Тогда при некотором $n_0 \geq 1$ имеем

$$\sup_{\substack{n \\ n\geq n_0}} p_n^{1/n} < q_1 < 1.$$

Поэтому по первому случаю признака Коши ряд $\sum p_n$ сходится.

Если же $q > 1$, то при всех $n_1 \geq 1$ имеем оценку

$$\sup_{\substack{n \\ n\geq n_1}} p_n^{1/n} > q_1$$

Это означает существование бесконечного множества значений n, для которых справедливо неравенство $p_n^{1/n} > q_1 > 1$. Следовательно, ряд $\sum p_n$ расходится по второму случаю признака Коши. Теорема 7 доказана.

Признак Коши, как и признак Даламбера, является довольно грубым. Он, например, тоже не позволяет решить вопрос о сходимости рядов $\sum 1/n$ и $\sum 1/n^2$. Однако он тоньше или, как еще говорят, сильнее признака Даламбера, поскольку можно указать ряд, к которому признак Коши применим, а признак Даламбера нет, но не наоборот. Точнее, можно доказать, что если для ряда $\sum p_n$ выполнены условия признака Даламбера с некоторыми q и n_0, то для него выполнены и условия признака Коши с тем же значением q и, возможно, иным значением n_0.

Лекция 3

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотренные ранее признаки сходимости рядов относятся к числу простейших и являются исходными для построения основных признаков сходимости. Например, гораздо более тонким признаком сходимости ряда является признак Раабе, который мы сейчас докажем.

Теорема 1 (признак Раабе). *1. Ряд $\sum p_n$ сходится, если для всех n, начиная с некоторого значения n_0, и некоторого $\alpha > 1$ имеет место неравенство*

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \le 1 - \frac{\alpha}{n}.$$

2. Ряд $\sum p_n$ расходится, если, начиная с некоторого n_1, выполнено неравенство

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge 1 - \frac{1}{n}.$$

Доказательство. 1. Для доказательства воспользуемся теоремой 3 § 2. Рассмотрим вспомогательный ряд вида $\sum 1/n^\beta$, где $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$, $\alpha > \beta > 1$. Этот ряд сходится (см. пример 3 к утверждению 1 §1). Обозначим его общий член через $q_n = 1/n^\beta$. Тогда при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Но так как $\alpha > \beta$, то при достаточно больших n, т.е. при $n > n_1$, где n_1— некоторое число, имеем

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1 - \frac{\alpha}{n} \ge \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

Тем самым для ряда $\sum p_n$ выполнены условия теоремы 3 § 2 и поэтому он сходится.

2. При $n \ge 2$ положим $b_n = \frac{1}{n-1}$ и $b_1 = 1$. Неравенство п.2 при $n \ge 2$ можно переписать в виде

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge \frac{n-1}{n} = \frac{1/n}{1/(n-1)} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Поскольку ряд $\sum b_n$ расходится (это просто гармонический ряд), по второму утверждению теоремы 3 § 2 ряд $\sum p_n$ тоже расходится. Теорема доказана полностью.

Т е о р е м а 2 (признак Раабе в предельной форме). *Пусть $p_n > 0$ для всех n и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{p_{n+1}}{p_n}\right) = l.$$

Тогда при $l > 1$ ряд $\sum p_n$ сходится, а при $l < 1$ — расходится.

Эта теорема выводится из предыдущей теоремы 1 аналогично тому, как теорема 7 § 2 из теоремы 6 § 2 или теорема 5 § 2 из теоремы 4 § 2.

Замечание. Иногда вместо последовательности b_n в формулировке теоремы 2 рассматривают последовательность

$$B_n = n\left(\frac{p_n}{p_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right).$$

При этом в обоих случаях имеем соотношение $D_n = p_{n+1}/p_n \to 1$ при $n \to \infty$. А так как имеет место равенство $b_n = B_n D_n$, то $b_n \sim B_n$ при $n \to \infty$. Следовательно, в теореме 2 замена b_n на B_n допустима. Из подобных соображений неравенство в условии 1) можно заменить на неравенство $B_n \geq 1 + \alpha$, а неравенство в условии 2) этой теоремы — неравенством $B_n \leq 1$.

Т е о р е м а 3 (признак Куммера). *Пусть $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$— две последовательности положительных чисел.*

1. Если существует $\alpha > 0$ и номер n_0 такие, что для всех $n > n_0$ имеем

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha,$$

то ряд $\sum a_n$ сходится.

2. Если найдется число n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ выполнено неравенство

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$$

и ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ расходится, то и ряд $\sum a_n$ тоже расходится.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3, обратим внимание на замечательную ее особенность, состоящую в том, что заключение о сходимости выводится относительно одного только ряда $\sum a_n$, в то время как вторая последовательность $\{c_n\}$ никак не фиксируется, что предоставляет возможности для ее подбора в каждом случае применения признака Куммера к исследованию сходимости конкретного числового ряда.

Доказательство теоремы 3. Без ограничения общности будем считать, что $n_0 = 1$, так как ясно, что члены с номерами $n < n_0$ можно просто отбросить.

В случае 1 имеем

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \alpha a_n.$$

Суммируя это неравенство по n при всех $n = 1, \ldots, m$, получим

$$c_1 a_1 - c_{m+1} a_{m+1} \geq \alpha(a_1 + \cdots + a_m),$$

откуда

$$s_m = a_1 + \cdots + a_m \leq \frac{c_1 a_1 - c_{m+1} a_{m+1}}{\alpha} < \frac{c_1 a_1}{\alpha}.$$

Это означает, что все частичные суммы s_m ряда $\sum a_n$ ограничены в совокупности и по теореме 1 § 2 этот ряд сходится.

Неравенство п. 2 можно переписать в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}.$$

Но так как по условию ряд $\sum 1/c_n$ расходится, то по теореме 3 расходится и ряд $\sum a_n$. Теорема доказана полностью.

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы 3.

Следствие 1. *Положим $c_n = 1$ для всех n. Условие сходимости ряда $\sum a_n$ тогда запишется в виде:*

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha \quad \textit{или} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \alpha.$$

Для расходимости в этом случае имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \geq 0 \quad \textit{или} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

Таким образом мы получаем новое доказательство признака Даламбера.

Следствие 2. *Положим $c_n = n - 1$. Тогда сходимость ряда $\sum a_n$ имеет место при выполнении условия*

$$n - 1 - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha, \quad \text{т.е.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha + 1}{n}.$$

Расходимость ряда $\sum a_n$ наступает при условии

$$c_n = n - 1, \quad n\frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-1) \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Другими словами, мы получаем признак Раабе.

С л е д с т в и е 3 (признак Бертрана).

1. Ряд $\sum a_n$, $a_n > 0$ сходится, если существует $\alpha > 0$ и номер n_0 такие, что при всех $n > n_0$ выполнены неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1+\alpha}{n \ln n}.$$

2. Данный ряд расходится, если при всех достаточно больших n имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В качестве c_n в признаке Куммера положим $c_n = (n-1)\ln(n-1)$. Тогда условие сходимости в нем запишется так:

$$(n-1)\ln(n-1) - n \ln n \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha,$$

т.е.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{(n-1)\ln(1-1/n)}{n \ln n} - \frac{\alpha}{n \ln n}. \qquad (*)$$

Далее, поскольку

$$(n-1)\ln(1-1/n) = \ln(1-1/n)^{n-1} > -1,$$

неравенство (*) вытекает из следующего неравенства:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1+\alpha}{n \ln n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{(n-1)\ln(1-1/n)}{n \ln n} - \frac{\alpha}{n \ln n},$$

т.е. выполнение условия сходимости в признаке Бертрана обеспечивает справедливость условия сходимости в признаке Куммера.

Таким образом, признак Бертрана для сходимости ряда доказан.

2. Положим в признаке Куммера $c_n = (n-2)\ln(n-1)$. Тогда расходимость ряда $\sum a_n$ будет иметь место, если выполнено неравенство

$$(n-1)\ln n \frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-2)\ln(n-1) \geq 0.$$

Достаточно показать, что оно является следствием условия расходимости в признаке Бертрана вида

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n},$$

т.е. доказать при всех n, больших некоторого n_0, следующее неравенство:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n} \geq \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\ln(n-1)}{\ln n}.$$

Оно, в свою очередь, вытекает из следующей цепочки неравенств $(n \geq 3)$:

$$\ln(1 - 1/n) < -1/n,$$

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n} \geq \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n\ln n}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\left(1 + \frac{\ln(1-1/n)}{\ln n}\right) = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\ln(n-1)}{\ln n}.$$

Таким образом, признак Бертрана полностью доказан.

Простым следствием признаков Даламбера, Раабе и Бертрана является признак Гаусса.

Теорема 4 (признак Гаусса). *Если $a_n > 0$ для всех натуральных n, $\varepsilon > 0$ — некоторая постоянная и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O(n^{-1-\varepsilon}),$$

то:

1) ряд $\sum a_n$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$;

2) если $\lambda = 1$, то ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leq 1$.

Доказательство. 1) Имеем $D_n = a_{n+1}/a_n \to 1/\lambda$ при $n \to \infty$, поэтому по теореме 5 §2 ряд $\sum a_n$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$, что и утверждалось в п. 1).

2) Если $\lambda = 1$ и $\mu \neq 1$, то $B_n = n(a_n/a_{n+1} - 1) \to \mu$ Поэтому согласно замечанию к теореме 2 ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu < 1$. Если же $\lambda = \mu = 1$, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $n \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O(n^{-1-\varepsilon_0}).$$

Но поскольку $\ln n = o(n^{\varepsilon_0})$, при всех достаточно больших n выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O(n^{-1-\varepsilon_0}) > 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n}.$$

Таким образом, при $\lambda = \mu = 1$ ряд $\sum a_n$ расходится по признаку Бертрана. Теорема 4 доказана полностью.

Комбинируя полученные выше результаты и снова привлекая, по существу, те же соображения, что и выше, можно получать все более и более тонкие и сложные признаки сходимости. Однако на практике реально используется один гораздо более простой и более сильный признак сходимости рядов, а именно, интегральный признак Коши – Маклорена, к доказательству которого мы переходим.

Т е о р е м а 5 (интегральный признак Коши – Маклорена). *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[1,+\infty)$ и $f(x)$ убывает на нем. Тогда:*

1) если $0 \le p_n \le f(n)$ при всех $n \ge n_0$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum p_n$ тоже сходится;

2) если $p_n \ge f(n) \ge 0$ при всех $n \ge n_0$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum p_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и выше, без ограничения общности будем считать, что $n_0 = 1$. Далее, поскольку $f(x)$ монотонно убывает, при всяком натуральном k и $k \le x \le k+1$ имеем

$$f(k) \ge f(x) \ge f(k+1).$$

Интегрируя это неравенство по указанному промежутку, получим

$$f(k) = \int\limits_k^{k+1} f(k)dx \ge \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \ge \int\limits_k^{k+1} dx = f(k+1).$$

При всяком $n \ge 2$ просуммируем эти неравенства по k от 1 до $n-1$. Получим

$$s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ge \int\limits_1^n f(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right) - f(1) = s_n - f(1).$$

Далее каждый из двух случаев будем рассматривать отдельно.

1. В этом случае интеграл $I = \int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится, поэтому при всех $n \ge 2$ для частичных сумм s_n ряда $\sum f(n)$ имеет место единообразная оценка вида $s_n \le I + f(1)$, и поскольку $f(n) \ge 0$ для всех натуральных n, ряд $\sum f(n)$ сходится, а вместе с ним сходится и мажорируемый им ряд $\sum p_n$, что и требовалось доказать.

2. Поскольку в этом случае интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ расходится, $\int\limits_1^n f(x)dx \to +\infty$ при $n \to \infty$. Но так как

$$s_n \geq s_{n-1} \geq \int\limits_1^n f(x)dx,$$

то и $s_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. А это означает, что ряд $\sum f(n)$ расходится вместе с рядом $\sum p_n$, для которого первый ряд по условию является минорантой. Теорема 5 доказана полностью.

Замечание. Очевидно, что в условии теоремы 5 интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ можно заменить интегралом $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, где $a > 1$ — произвольное число.

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из интегрального признака.

1. Ранее мы доказали, что при $s > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty 1/n^s$ сходится. Его сумма обозначается символом $\zeta(s)$ и называется "дзета-функцией Римана". Дадим другое доказательство сходимости этого ряда. Действительно, при таких значениях s несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty x^{-s}dx$ сходится и легко вычисляется. Имеем

$$\int\limits_1^\infty x^{-s}dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^\infty = \frac{1}{s-1}.$$

Следовательно, по теореме 5 ряд $\sum n^{-s}$ тоже сходится, что и требовалось доказать. Если же $s \leq 1$, то интеграл $\int\limits_1^\infty x^{-s}dx$ расходится, а вместе с ним расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty 1/n^s$.

Замечание. Ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty 1/n^s$ при некоторых значениях s впервые рассматривал Л. Эйлер. Более того, при s, равном четному натуральному числу, он нашел точные значения для его суммы $\zeta(s)$. Позднее Б. Риман определил функцию $\zeta(s)$ для всех значений аргумента s, исключая точку $s = 1$, причем не только вещественных, но и комплексных. Он детально исследовал свойства этой функции, и поэтому она носит его имя. Дзета-функция Римана играет огромную роль в теории чисел. Относительно некоторых свойств этой функции Риман высказал ряд гипотез, которые давно уже доказаны. Все, кроме одной. Она известна как гипотеза Римана о нулях ζ-функции. На сегодняшний день эта гипотеза вместе с последней теоремой Ферма являются двумя самыми престижными математическими проблемами.

2. Валле Пуссен показал [35], что при $s > 1$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) \right), \qquad (*)$$

причем ряд в правой части сходится при $s > 0$. Действительно, общий член p_n последнего ряда можно представить в виде

$$0 < p_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}.$$

Следовательно, ряд $\sum p_n$ сходится при $s > 0$. Равенство (*) при $s > 1$ получим, раскрывая скобки в правой части его и используя при тех же s равенство

$$\frac{1}{n^{s-1}} = \frac{1}{n^{s-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right).$$

3. Опираясь на интегральный признак, исследуем сходимость ряда $\sum p_n$, где $p_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = -\int_2^{\infty} d\left(\frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln 2},$$

т.е. несобственный интеграл сходится и потому ряд $\sum p_n$ тоже сходится.

Лекция 4

§ 4. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ. РЯДЫ ЛЕЙБНИЦА

Мы снова возвращаемся к рассмотрению числовых рядов общего вида.

Определение 1. *Ряд* $\sum a_n$ *называется* **абсолютно сходящимся,** *если сходится ряд* $\sum |a_n|$.

Ясно, что всякий сходящийся ряд с неотрицательными членами абсолютно сходится. В то же время легко построить сходящийся ряд, который не является абсолютно сходящимся. В качестве примера можно привести следующий ряд:

$$-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots .$$

Его сумма равна нулю, и в то же время ряд, составленный из модулей его членов, расходится в силу расходимости гармонического ряда.

Определение 2. *Сходящийся ряд* $\sum a_n$ *называется* **условно сходящимся,** *если ряд* $\sum |a_n|$ *расходится.*

Согласно этому определению, рассмотренный выше ряд является условно сходящимся. Заметим, что про абсолютно (или условно) сходящийся ряд говорят еще, что ряд сходится абсолютно (или условно). Целесообразность введенных понятий подкрепляется следующей теоремой.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum a_n$ *абсолютно сходится, то он является сходящимся.*

Доказательство. По критерию Коши из сходимости ряда $\sum |a_n|$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $p \geq 1$ и $n > n(\varepsilon)$ имеем

$$\sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon,$$

откуда

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon.$$

Но это означает выполнение критерия Коши. Теорема 1 доказана.

Определение 3. *Числовой ряд* $\sum a_n$ *называется* **знакочередующимся,** *если все его соседние члены имеют разные знаки.*

Определение 4. *Знакочередующийся ряд вида* $\sum a_n$ *называется* **рядом Лейбница,** *если модуль его общего члена* $|a_n|$ *монотонно стремится к нулю.*

Теорема 2. *Всякий ряд Лейбница* $\sum a_n$ *сходится.*

Доказательство. Покажем сначала, что всякий отрезок этого ряда мажорируется модулем его первого члена. Пусть $\sum\limits_{m=n+1}^{n+p} a_m$ — некоторый отрезок ряда. Мы хотим доказать неравенство вида

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \le |a_{n+1}|.$$

Положим $b_k = |a_k|$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|a_k + a_{k+1}| = |a_k| - |a_{k+1}| = b_k - b_{k+1} < b_k.$$

Кроме того, при всех k числа $(a_k + a_{k+1})$ имеют один и тот же знак. Следовательно, при четном $p = 2r$ имеем

$$0 \le |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+2r-1} + a_{n+2r}| =$$

$$= (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{2r-1} - b_{2r}) =$$

$$= b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots - (b_{2r-2} - b_{2r-1}) - b_{2r} \le b_1 = |a_{n+1}|.$$

Если же $p = 2r + 1$ нечетное, то

$$0 \le |a_{n+1} + \cdots + a_{n+2r+1}| = (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{2r-1} - b_{2r}) + b_{2r+1} =$$

$$= b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots - (b_{2r} - b_{2r+1}) \le b_1 = |a_{n+1}|.$$

Таким образом, в обоих случаях действительно

$$T_{n,p} = \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \le |a_{n+1}| = b_{n+1}.$$

Но теперь, так как $b_{n+1} \to 0$, мы при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$ и достаточно большом n имеем

$$T_{n,p} \le b_{n+1} < \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности p, исходя из критерия Коши, заключаем, что ряд $\sum a_n$ сходится. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 (оценка остатка ряда Лейбница). *Для остатка r_n ряда Лейбница $\sum a_n$ справедлива оценка $|r_n| \le |a_{n+1}|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 ряд $\sum a_n$ сходится, поэтому

$$|r_n| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} a_n\right|.$$

Заметим, что при доказательстве теоремы 2 для любого натурального p нами получена оценка

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_n\right| \le |a_{n+1}|.$$

Устремляя $p \to \infty$, получаем требуемое неравенство. Теорема 3 доказана.

§ 5. ПРИЗНАКИ АБЕЛЯ И ДИРИХЛЕ

Признаки Абеля и Дирихле применяются при доказательстве достаточно широкого класса числовых рядов общего вида. Доказательство обоих признаков основано на **формуле дискретного преобразования Абеля,** которую мы сейчас докажем.

Т е о р е м а 1. *Пусть $A_k = \sum\limits_{m=N+1}^{k} a_m$. Тогда при $M > N$ имеют место формулы:*

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k (b_k - b_{k+1}); \tag{1}$$

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_{M+1} + \sum_{k=N+1}^{M} A_k (b_k - b_{k+1}). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что правые части формул равны между собой, так как, вычитая правую часть формулы (2) из правой части формулы (1), получаем

$$A_M b_M - A_M b_{M+1} - A_M (b_M - b_{M+1}) = 0.$$

Следовательно, достаточно доказать только формулу (1). Преобразуя ее правую часть, имеем

$$A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k (b_k - b_{k+1}) = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_k - \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{M} A_k b_k - \sum_{l=N+2}^{M} A_l b_l = A_{N+1} b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} (A_k - A_{k-1})\, b_k =$$

$$= a_{N+1} b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} a_k b_k = \sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k.$$

Тем самым теорема 1 доказана.

Признаки Абеля и Дирихле применяются к рядам вида $\sum a_n b_n$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

(А) (признак Абеля). *Если последовательность b_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum a_n b_n$ также сходится.*

(Д) (признак Дирихле). *Если последовательность b_n монотонна и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, а последовательность s_n частичных сумм ряда $\sum a_n$ ограничена, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда $b_n \geq 0$ и b_n убывает. Все прочие случаи легко сводятся к данному следующим образом. Если $b_n \leq 0$, то надо изменить знаки у всех a_n и b_n. Если же $b_n \uparrow$, то b_n надо представить в виде $b_n = b_0 - d_n$, где $b_0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, и свести теорему к исследованию ряда $\sum a_n d_n$. Здесь уже имеем $d_n \downarrow$.

Доказательство теоремы проведем, применяя критерий Коши к ряду $\sum a_n b_n$. Для этого применим формулу (1) преобразования Абеля к отрезку этого ряда $T_{n,p}$. Используя обозначение $A_k = s_k - s_n$ и учитывая, что $b_k - b_{k+1} \geq 0$, получим

$$|T_{n,p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| = \left| A_{n+p} b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k\, (b_k - b_{k+1}) \right| \leq$$

$$\leq |A_{n+p}|\, b_{n+p} + \max_{n<k<n+p} |A_k| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \leq$$

$$\leq \max_{n<k\leq n+p} |A_k|\, b_{n+1}.$$

Рассмотрим теперь случай (А). Поскольку b_n ограничена, при некотором $c > 0$ для всех n имеем $|b_{n+1}| < c$. Далее, так как ряд $\sum a_n$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > n_0(\varepsilon)$ и $k > n$ имеем

$$|A_k| = \left| \sum_{m=n+1}^{k} a_m \right| = |s_k - s_n| \leq |s_k| + |s_n| < \varepsilon.$$

Тогда при указанных n и любом p для величины $T_{n,p}$ справедлива оценка

$$|T_{n,p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \le c\varepsilon.$$

Но так как ε произвольно, а c фиксировано, то последнее неравенство означает, что ряд $\sum a_n b_n$ удовлетворяет критерию Коши и поэтому сходится. Тем самым признак Абеля доказан.

В случае (Д) ограничены частные суммы A_k ряда $\sum a_n$, и поэтому существует c, для которого $|A_k| < c$ при всех k. Кроме того, $b_n \to 0$. Следовательно, при произвольном $\varepsilon > 0$, достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$ и произвольном $p \ge 1$ имеем оценку

$$|T_{n,p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < c\varepsilon.$$

Отсюда, как и в случае А, заключаем, что по критерию Коши ряд $\sum a_n b_n$ сходится. Теорема 2 доказана полностью.

§ 6. ПЕРЕСТАНОВКИ ЧЛЕНОВ РЯДА

Определение 1. *Пусть $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение натурального ряда на самого себя. Тогда ряд $\sum b_n$, где $b_n = a_{\sigma(n)}$, называется* **перестановкой ряда** $\sum a_n$.

Теорема 1. *Любая перестановка $\sum b_n$ абсолютно сходящегося ряда $\sum a_n = A$ абсолютно сходится к той же сумме A.*

Доказательство. Положим

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,\ A' = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, A'_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Пусть n_1 настолько велико, что $A' - A'_{n_1} < \varepsilon$. Тогда при любом $n > n_1$ для остатка $r_n = A - A_n$ ряда $\sum a_n$ имеем оценку

$$|r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \le \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| = A' - A'_{n_1} < \varepsilon.$$

Пусть теперь n_2 таково, что среди чисел $\sigma(1), ..., \sigma(n_2)$ содержатся все целые числа отрезка $[1, n_1]$. Положим $m = \max(\sigma(1), ..., \sigma(n_2))$. Тогда при всех $n > n_2$ имеем

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n_1} a_k + \sum_{k=n_1+1}^{m}{}' a_k.$$

Штрих в последней сумме означает, что некоторые слагаемые в ней опущены. Для этой суммы, очевидно, имеют место оценки

$$|B_n - A_{n_1}| = \left| \sum_{k=n_1+1}^{m}{}' a_k \right| \le \sum_{k=n_1+1}^{m}{}' |a_k| = A'_m - A'_{n_1} \le A' - A'_{n_1} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что при всех $n > n_2$

$$|A - B_n| \le |A - A_{n_1}| + |B_n - A_{n_1}| \le \left(A' - A_{n_1}{}'\right) + \left(A' - A'_{n_1}\right) < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ это означает, что $B_n \to A$ при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum b_n$ сходится и $\sum b_n = \sum a_n$. Отсюда, в частности, следует, что и ряд $\sum |b_n|$ сходится к сумме A', т.е. ряд $\sum b_n$ сходится абсолютно. Теорема 1 доказана полностью.

Основное отличие в свойствах абсолютно и условно сходящихся рядов обнаруживается при перестановке их членов. Как показывает теорема 1, бесконечная сумма абсолютно сходящегося ряда в этом случае ведет себя точно так же, как и конечная сумма, т.е. при перестановке слагаемых сумма не изменяется. Гораздо более сложная ситуация имеет место для условно сходящегося ряда. Тем не менее, она достаточно полно описывается следующей теоремой.

Т е о р е м а 2 (теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). *Каково бы ни было вещественное число A, найдется сходящаяся перестановка $\sum b_n$ условно сходящегося ряда $\sum a_n$ такая, что $\sum b_n = A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты будем считать, что $a_n \neq 0$ при всех n. Сначала в ряде $\sum a_n$ выделяем все положительные слагаемые p_k и отрицательные слагаемые $-q_l$, нумеруя их индексами k и l в порядке следования в ряде $\sum a_n$. Затем составляем перестановку $\sum b_n$ ряда $\sum a_n$: в качестве b_1 берем p_1, если $A \geq 0$, и $-q_1$, если $A < 0$. Подчеркнем, что все p_k и q_l положительны.

Далее мы добавляем в общую сумму $\sum\limits_{m=1}^{n} b_m$ очередные слагаемые по следующему правилу: если сумма не превышает A, то добавляем очередное положительное слагаемое $b_{n+1} = p_{k_1}$, а если она превосходит A, то добавляем очередное отрицательное слагаемое $b_{n+1} = -q_{l_1}$. В результате этого сумма все время колеблется вокруг значения A, причем размах колебаний постепенно убывает до нуля, и в пределе для суммы ряда $\sum b_n$ мы получаем требуемое значение A.

Для того чтобы доказательство теоремы было полным, достаточно в приведенной схеме обосновать только некоторые ее моменты.

Докажем, что оба ряда $\sum p_k$ и $\sum(-q_l)$ расходятся. Действительно, если бы оба они сходились, то исходный ряд $\sum a_n$ сходился бы абсолютно, а если бы один ряд расходился, а другой сходился, то частичная сумма ряда $\sum a_n$, составленная из двух частичных сумм рядов $\sum p_k$ и $\sum q_l$ соответственно, тоже расходилась, что неверно. Далее заметим, что поскольку $\{p_k\}$ и $\{-q_l\}$ являются подпоследовательностями для $\{a_n\}$, $p_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $-q_l \to 0$ при $l \to \infty$.

Для определенности будем считать, что $A > 0$. Тогда по построению ряд b_n имеет такую структуру:

$$\sum b_n = \underbrace{p_1 + \cdots + p_{k_1}}_{P_1} - \underbrace{q_1 - \cdots - q_{l_1}}_{Q_1} +$$

$$+ \underbrace{p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2}}_{P_2} - \underbrace{q_{l_1+1} - \cdots - q_{l_2}}_{Q_2} + \cdots .$$

Здесь числа $P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots$ обозначают суммы подряд идущих слагаемых одного знака в ряде $\sum b_n$. Количество групп слагаемых одинакового знака в этой сумме бесконечно, так как в противном случае ряд $\sum b_n$ отличался бы от $\sum p_k$ или от $\sum(-q_l)$ лишь конечным числом членов, и тогда он расходился бы к $+\infty$ или к $-\infty$ соответственно. Но это не имеет места, так как по построению величина частичной суммы s_n ряда на каждом шаге изменяется в направлении приближения к числу A, если только $s_n \neq A$. В силу этого, в сумму $\sum b_n$ войдут все числа p_k и $-q_l$, а следовательно, и все a_n, т.е. $\sum b_n$ — действительно перестановка ряда $\sum a_n$.

Теперь оценим разность $r_n = s_n - A$. При всяком n член ряда b_n в зависимости от своего знака попадает в одну из сумм P_m или Q_m. Следовательно, мы имеем одно из равенств: $b_n = p_k$ или $b_n = -q_l$.

По построению ряда $\sum b_n$ величина r_n меняет знак в том случае, если $b_n = p_{k_m}$ или $b_n = -q_{l_m}$. Тогда в обоих случаях имеет место оценка

$$|r_n| = |s_n - A| \leq |b_n|.$$

Для всех прочих n при добавлении очередного слагаемого $|r_n|$ значения частичной суммы s_n от числа A убывает, поэтому тогда справедливо неравенство $|r_n| < |r_{n-1}|$. Следовательно, всегда имеем

$$|s_n - A| < p_{k_m} + q_{l_m} + q_{l_{m-1}}.$$

Здесь номер m можно рассматривать как монотонно стремящуюся к бесконечности функцию от n, и поэтому для последовательности d_n, где $d_n = p_{k_m} + q_{l_m} + q_{l_{m-1}}$, в силу того, что p_k и $q_l \to 0$ при k и $l \to \infty$, имеем $d_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда при $n \to \infty$ окончательно получим $r_n = s_n - A \to 0$ и $s_n \to A$. Теорема 2 доказана.

Лекция 6

§ 7. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

Мы уже встречались с некоторыми действиями над числовыми рядами такими, как почленное сложение, одновременное умножение всех членов ряда на одно и то же число, перестановки членов ряда. Все эти действия будем называть **арифметическими операциями над рядами.** Кроме того, здесь мы рассмотрим и другие математические операции, а именно: расстановку и раскрытие скобок, а также операцию умножения рядов. Начнем с наиболее простого — с расстановки скобок.

Утверждение 1. *Если в сходящемся ряде $\sum a_n$ некоторые группы слагаемых заключить в скобки, то его сходимость не нарушится и сумма не изменится.*

Доказательство. Любая формальная расстановка скобок в бесконечной сумме $\sum a_n$ приводит к новой бесконечной сумме вида

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots = b_1 + b_2 + \cdots,$$

где при $s = 0, 1, \ldots$ имеем $b_s = a_{k_{s-1}+1} + \cdots + a_{k_s}$ и $k_0 = 0$.

Очевидно, что последовательность $\{B_s\}$ частичных сумм ряда $\sum b_s$ не что иное, как подпоследовательность $\{A_{k_s}\}$ частичных сумм ряда $\sum a_n$. Но так как всякая подпоследовательность сходится к тому же пределу, что и сама последовательность, то для $A_k \to A$ имеем, что $B_s = A_{k_s} \to A$ при $s \to \infty$, что и требовалось доказать.

Пример сходящегося ряда $(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots = 0$ показывает, что обратное утверждение не всегда справедливо. Однако имеет место, например, следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть ряд, составленный из скобок, сходится к сумме B, точнее, пусть $\sum b_n = B$, где $b_n = (a_{n1} + \cdots + a_{nk})$, причем k фиксировано, и пусть каждая из k последовательностей является бесконечно малой, т.е. $a_{ns} \to 0$ при $n \to \infty$ и всех $s = 0, \ldots, k$. Тогда в ряде $\sum b_n$ можно раскрыть скобки. Другими словами, ряд*

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1k} + a_{21} + \cdots = d_1 + d_2 + \cdots + d_k + d_{k+1} + \cdots,$$

где $d_{k(n-1)+s} = a_{ns}$, сходится, причем к той же самой сумме, что и ряд $\sum b_n$.

Доказательство. Оно тоже очень просто вытекает из свойств сходящихся последовательностей. Действительно, для частичных сумм D_n и B_m рядов $\sum d_n$ и $\sum b_m$ при $n = km$ имеем равенство

$$D_{km} = B_m \to B \text{ при } m \to \infty.$$

Заметим, что разность $\alpha_n = D_n - D_{km}$ при $m = [n/k]$ и $s = n - km$ равна

$$\alpha_n = d_{km+1} + \cdots + d_{km+s} = a_{m,1} + \cdots + a_{m,s}.$$

А так как $a_{m,s}$ при любом $s = 1, \ldots, k$ — бесконечно малая величина при $m \to \infty$, то поскольку $m \to \infty$ при $n \to \infty$, имеем

$$|\alpha_n| \le |a_{m,1}| + \cdots + |a_{m,s}| \le |a_{m,1}| + \cdots + |a_{m,n}| \to 0,$$

$$\alpha_n \to 0, \quad D_n = D_{mk} + \alpha_n \to B + 0 = B.$$

Утверждение доказано.

Заметим, что если в некоторых скобках содержится менее k слагаемых, то можно подразумевать вместо отсутствующих слагаемых нули. Другими словами, доказанное утверждение справедливо и в этом, несколько более общем, случае.

Более сложным является вопрос о произведении числовых рядов. Нам потребуются новые определения.

Определение 1. *Занумеруем каким-либо образом счетное множество пар (m, n) натуральных чисел m и n, т.е. поставим каждой паре в соответствие свой номер k. Тем самым мы получим две последовательности: $m = m(k)$ и $n = n(k)$, принимающие натуральные значения. Такую нумерацию будем называть* **линейной нумерацией** *пар. Если теперь $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — два числовых ряда и $h_k = a_{m(k)}b_{n(k)}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ будем называть их* **произведением, отвечающим данной линейной нумерации пар индексов** *(m, n) или данной перестановке попарных произведений $a_m b_n$.*

Задача (теорема Штейница). *Пусть $\{\bar{c}_n\}$ — последовательность, составленная из векторов k-мерного пространства R^k $(k \ge 2)$. Пусть для любого вектора $\bar{f} \in R^k$, $\bar{f} \ne 0$, ряд $\sum a_n$, где $a_n = (\bar{c}_n, \bar{f}_n)$ — скалярное произведение векторов $\bar{c}_n$ и $\bar{f}$, условно сходится.*

Требуется доказать, что для всех $\bar{b} \in \mathbb{R}^k$ существует перестановка $\sum \bar{c}_{\sigma(n)}$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \bar{c}_{\sigma(n)} = \bar{b}$.

Определение 2. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$, где $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$, называется* **формальным произведением** (*или просто* **произведением**) *двух рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$.*

Теорема 1. *Если оба ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, причем $\sum a_n = A$, а $\sum b_n = B$, то при любой перестановке попарных произведений их членов ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ абсолютно сходится к сумме AB.*

Доказательство. Зафиксируем какую-либо перестановку попарных произведений $k \leftrightarrow (m(k), n(k))$. Докажем сначала, что ряд $\sum h_k$ сходится абсолютно. Пусть H'_k — последовательность частичных сумм ряда $\sum |h_k|$ и пусть r — какой-либо номер. Тогда имеем

$$H'_r = \sum_{k=1}^{r} \left|a_{m(k)} b_{n(k)}\right|.$$

Положим $m_0 = \max\limits_{k \le r} m(k)$, $n_0 = \max\limits_{k \le r} n(k)$. В этом случае, очевидно,

$$H'_r = \sum_{k=1}^{r} \left|a_{m(k)}\right| \cdot \left|b_{n(k)}\right| \le \sum_{k=1}^{m_0} |a_k| \sum_{k=1}^{n_0} |b_k| \le A'B',$$

где $A' = \sum |a_n|$, $\quad B' = \sum |b_n|$.

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum |h_k|$ ограничены в совокупности, а это значит, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ абсолютно сходится к некоторой своей сумме H. Но тогда при любой перестановке его членов сходимость не нарушается и сумма не изменяется. Переставим эти члены так, чтобы при любом $k = n^2$ частичная сумма H_k имела вид $H_k = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) = A_n B_n$. Тогда при $n \to \infty$ будем иметь $H_{n^2} \to AB$. В силу сходимости ряда $\sum h_k$ последовательность H_k его частичных сумм сходится к H, и так как H_{n^2} — подпоследовательность H_k, то $H = AB$.

Итак, если абсолютно сходятся оба ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$, то сумма произведений рядов равна произведению их сумм.

В общей ситуации на такое равенство рассчитывать не приходится. Действительно, если ряд $\sum a_n$ сходится условно, а в качестве $\sum b_n$ взят простейший ряд вида $\sum b_n = 1 + 0 + 0 + \cdots$, то, исходя из определения, можно убедиться, что их произведение, отвечающее некоторой перестановке пар (m, n), дает ряд $\sum c_n$, являющийся некоторой перестановкой ряда $\sum a_n$. Но согласно теореме Римана при перестановках такого ряда его сумма может измениться.

Естественно, что при определенных ограничениях утверждение предыдущей теоремы допускает различные обобщения. Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (теорема Мертенса). *Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится к сумме A и ряд $\sum b_n$ условно сходится к сумме B. Тогда формальное произведение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$ этих рядов сходится к сумме AB.*

Доказательство. Пусть H_n — последовательность частичных сумм ряда $\sum h_n$. Имеем

$$H_n = \sum_{m=1}^{n} h_m = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m-k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n-k+1} b_l.$$

Обозначим $l = m - k + 1$. Очевидно, имеем $1 \le k \le m \le n$, откуда получим $1 \le m - k + 1 = l \le n - k + 1$. Следовательно,

$$H_n \doteq \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n-k+1} b_l = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n-k+1}.$$

Здесь B_{n-k+1} — соответствующая частичная сумма ряда $\sum b_n$.

Поскольку ряд $\sum b_n$ сходится к сумме B, разность $\beta_l = B - B_l$ является его остатком $\beta_l = \sum\limits_{n=l+1}^{\infty} b_n$, который стремится к нулю с ростом l. Поэтому, обозначив через A_n и α_n остаток и частичную сумму ряда $\sum a_n$, будем иметь

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (B - \beta_{n-k+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k B - \sum_{n=1}^{\infty} a_k \beta_{n-k+1} = AB - \alpha_n B - \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_{n-k+1}.$$

Осталось показать, что если $R_n = AB - H_n$, то $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но $\alpha_n \to 0$, поэтому $R_n' = \alpha_n B \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим теперь сумму $R_n'' = \sum\limits_{n=1}^{n} a_k \beta_{n-k+1}$:

$$|R_n''| \le \sum_{n=1}^{n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}| =$$

$$= \overbrace{\sum_{k \le n/2} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}|}^{\Sigma_1} + \overbrace{\sum_{n/2<k\le n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}|}^{\Sigma_2} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Так как $\beta_k \to 0$, то при некотором $c > 0$ для всех k имеем неравенство $|\beta_k| < c$, откуда

$$\Sigma_2 \le \sum_{n/2<k\le n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}| \le \sum_{n/2<k\le n} |a_k| c \le c \sum_{n/2<k\le n} |a_k| = cT.$$

Но ряд $\sum |a_n|$ сходится, поэтому, согласно критерию Коши, при всяком $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство $T < \varepsilon$, откуда вытекает, что $\Sigma_2 < c\varepsilon$. С другой стороны, так как $\beta_n \to 0$, то при достаточно большом $l = n - k + 1 > n_1(\varepsilon)$ имеем $|\beta_l| < \varepsilon$. А это значит, что если $n/2 > n_1(\varepsilon)$ и $k \leq n/2$, то $|\beta_{n-k+1}| < \varepsilon$, откуда

$$\Sigma_1 = \sum_{k \leq n/2} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}| \leq \varepsilon \sum_{k \leq n/2} |a_k| \leq \varepsilon A',$$

где A' — сумма сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Таким образом, при $n \geq 2n_1(\varepsilon) + n_0(\varepsilon)$ имеем

$$R''_n < \varepsilon A' + \varepsilon c = \varepsilon(A' + c).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $R''_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда и $R_n = R'_n + R''_n \to 0$, откуда $H_n \to AB$. Теорема 2 доказана.

Лекция 7

§ 8. ДВОЙНЫЕ И ПОВТОРНЫЕ РЯДЫ

Понятие произведения двух рядов можно рассматривать как пример более общего понятия двойных рядов, изучению которых посвящен этот параграф.

Определение 1. *Числовая функция* $a(m,n) = a_{m,n} = a_{mn}$ *двух натуральных аргументов* m *и* n *называется* **двойной последовательностью.**

Для таких последовательностей мы также будем использовать обозначение $\{a_{m,n}\}$.

Определение 2. Двойным рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m,n} a_{m,n} = \sum a_{m,n}$$

называется формальная бесконечная сумма S *вида*

$$S = a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{31} + a_{32} + a_{33} + \dots.$$

Определение 3. *Конечная двойная сумма*

$$A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} = a_{11} + \dots + a_{1n} + \dots + a_{m1} + \dots + a_{mn}$$

называется (прямоугольной) **частичной суммой двойного ряда** *вида* $\sum a_{m,n}$. *Исходная последовательность* $a_{m,n}$ *называется* **общим членом ряда.**

Далее нам необходимо дать определение сходимости двойного ряда как предела частичных сумм $A_{m,n}$.

Определение 4. *Число* l *называется* **пределом двойной последовательности** $\{B_{m,n}\}$ *(или* **двойным пределом***), если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдутся числа* $m_0(\varepsilon)$ *и* $n_0(\varepsilon)$ *такие, что для всех пар* (m,n) *с условием* $m > m_0(\varepsilon)$ *и* $n > n_0(\varepsilon)$ *выполнены неравенства*

$$|B_{m,n} - l| < \varepsilon.$$

Понятие предела двойной последовательности полностью согласуется с общим определением предела функции по базе B. В данном случае база B представляет собой совокупность окончаний b_{m_0,n_0}, каждое из которых образовано множеством пар (m,n) натуральных чисел m и n с условием $m > m_0, n > n_0$. Предел $A = \lim\limits_B A_{m,n}$ по этой базе и есть указанный выше двойной предел. Для самой базы B будем использовать обозначение $m \to \infty, n \to \infty$. Также будем писать:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} A_{m,n} = A.$$

Для двойных пределов выполнены все свойства предела по базе множеств. Например, предел суммы равен сумме пределов, имеет место единственность предела. В частности, отсюда для сходящегося двойного ряда вытекает необходимый признак сходимости.

Утверждение 1 (необходимый признак сходимости двойного ряда). *Если ряд $\sum a_{m,n}$ сходится, то $a_{m,n} \to 0$ при $m \to \infty, n \to \infty$.*

Доказательство. Имеем $a_{m,n} = A_{m,n} - A_{m,n-1} - A_{m-1,n} + A_{m-1,n-1}$. Так как по условию $A_{m,n} \to A$, то

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{m,n} = A - A - A + A = 0,$$

что и требовалось доказать.

Исходя из общей формулировки критерия Коши для существования предела функции по базе множеств, можно сформулировать критерий Коши для двойных рядов.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы двойной ряд $\sum a_{m,n}$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали числа $m_0(\varepsilon)$ и $n_0(\varepsilon)$ такие, что при всех $m_1, m_2 > m_0(\varepsilon)$ и $n_1, n_2 > n_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство*

$$|A_{m_1,n_1} - A_{m_2,n_2}| < \varepsilon.$$

В важном случае двойных рядов с неотрицательным общим членом $p_{m,n} \geq 0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для сходимости двойного ряда $\sum_m \sum_n p_{m,n}$ с условием $p_{m,n} \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы $P_{m,n}$ были бы ограничены в совокупности, т.е. чтобы существовало число $C > 0$, для которого $P_{m,n} < C$ при всех натуральных m и n.*

Доказательство. Достаточность. Заметим сначала, что если $m_1 < m_2$, $n_1 < n_2$, то $P_{m_1,n_1} \leq P_{m_2,n_2}$. Далее из ограниченности частичных сумм $P_{m,n}$ следует, что существует число M такое, что

$M = \sup\limits_{m,n} P_{m,n}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ число $M - \varepsilon$ уже не является верхней гранью для $\{P_{m,n}\}$, поэтому найдутся $m_0(\varepsilon)$ и $n_0(\varepsilon)$ такие, что $M - \varepsilon < P_{m_0,n_0} \le M$. Но в этом случае при всех $m > m_0$ и $n > n_0$ имеем

$$M - \varepsilon < P_{m_0,n_0} \le P_{m,n} \le M,$$

откуда $|P_{m,n} - M| < \varepsilon$. Это значит, что $P_{m,n} \to M$ при $m \to \infty, n \to \infty$, т.е. $\sum_m \sum_n p_{m,n} = M$.

Необходимость. Заметим, что ограниченность последовательности $P_{m,n}$ в случае ее сходимости есть следствие соответствующего общего свойства функции, имеющей предел по базе. Теорема 2 доказана.

Определение 5. *Двойной ряд $\sum_m \sum_n a_{m,n}$ называется* **абсолютно сходящимся,** *если сходится ряд $\sum_m \sum_n |a_{m,n}|$, составленный из модулей его членов.*

Теорема 3. *Двойной абсолютно сходящийся ряд $\sum\sum a_{m,n}$ сходится.*

Доказательство. Положим

$$p_{m,n} = \frac{|a_{m,n}| + a_{m,n}}{2}, \quad q_{m,n} = \frac{|a_{m,n}| - a_{m,n}}{2}.$$

Тогда имеем $|a_{m,n}| = p_{m,n} + q_{m,n}$ и

$$a_{m,n} = \frac{p_{m,n} - q_{m,n}}{2}, \quad p_{m,n} \ge 0, \quad q_{m,n} \ge 0.$$

Поскольку ряд $\sum_m \sum_n |a_{m,n}|$ сходится, найдется число $C > 0$ с условием

$$A'_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{k,l}| < C$$

при всех m и n. Но для частичных сумм $P_{m,n}$ и $Q_{m,n}$ справедливы неравенства $P_{m,n} \le A'_{m,n}, Q_{m,n} \le A'_{m,n}$, поэтому по теореме 2 ряды $\sum\sum p_{m,n}$ и $\sum\sum q_{m,n}$ сходятся. Следовательно, ряд $\sum\sum a_{m,n}$, равный их разности, тоже сходится. Теорема 3 доказана.

Бесконечная сумма вида $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ позволяет рассматривать и иную важную конструкцию использования предельного перехода, которая приводит к понятию повторного ряда.

Определение 6. *Пусть $\{a_{m,n}\}$ — двойная последовательность. Зафиксируем параметр m и рассмотрим формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$. Обозначим его символом b_m. Тогда формальная бесконечная сумма*

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$$

называется **повторным рядом.**

Очевидно, с одной и той же двойной последовательностью $a_{m,n}$ можно связать еще один двойной ряд, а именно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right),$$

где $\beta_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$.

Заметим, что если здесь опустить скобки, то, вообще говоря, выражение $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ можно рассматривать и как двойной ряд, и как повторный ряд, и это может приводить к недоразумениям. Там, где эти недоразумения возможны, необходимо ставить скобки или специально оговаривать точный смысл выражения.

Введем понятие сходимости повторного ряда и рассмотрим связи между сходимостью двойного и повторного рядов.

Определение 7. *Если при любом m ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходится к сумме b_m и ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ тоже сходится к некоторому числу A, то повторный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$ называют* **сходящимся к сумме** *A и записывают в виде*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) = A.$$

Определение 8. *Пусть $(m(k), n(k))$ — некоторая линейная нумерация совокупности всех пар (m, n). Тогда обычный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$, где $d_k = a_{m(k),n(k)}$, называется* **линейной перестановкой двойного ряда** *$\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$, отвечающей данной нумерации его членов.*

Т е о р е м а 4. *Пусть $a_{m,n} \geq 0$ для всех пар (m, n) и пусть ряд $\sum d_k$ — некоторая его линейная перестановка. Тогда если сходится хотя бы один из трех рядов*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} d_k,$$

то два других тоже сходятся к той же сумме.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через A, B и D сумму каждого из рассматриваемых рядов. Требуется доказать, что если существует хотя бы одно из этих трех чисел, то существуют и два других и все они равны между собой. Для этого достаточно доказать три утверждения: 1) если существует сумма A, то существует сумма B и $B \leq A$; 2) если существует сумма B, то существует сумма D и $D \leq B$; 3) если существует сумма D, то существует сумма A и $A \leq D$. Рассмотрим их по порядку.

1) Существование числа A означает сходимость частичных сумм $A_{m,n}$ ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ к его сумме A при $m \to \infty, n \to \infty$. Ранее было доказано, что в этом случае $A = \sup\limits_{m,n} A_{m,n}$, откуда $A_{m,n} \leq A$ при всех натуральных m, n. Очевидно, что при этом справедливы неравенства

$$b_m(n) = \sum_{l=1}^{n} a_{m,l} \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = A_{m,n} \leq A.$$

Следовательно, при любом m существуют числа

$$b_m = \sup_n b_m(n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_m(k).$$

Далее, так как

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(n) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = A_{m,n} \leq A,$$

то, устремляя $n \to \infty$, при любом m имеем

$$A \geq \sum_{k=1}^{m} b_k = B_m.$$

Но B_m не убывает, поэтому при $m \to \infty$ последовательность B_m сходится к некоторому числу B, причем $B \leq A$. Утверждение 1 доказано.

2) Пусть B существует. Тогда для любой частичной суммы $D_k = \sum\limits_{r=1}^{k} d_k$ найдется пара чисел (m_0, n_0) с условием, что $m(r) \leq m_0$ и $n(r) \leq n_0$ при всех $r \leq k$. Но тогда все слагаемые d_r одновременно будут входить и в суммы A_{m_0,n_0}, причем

$$A_{m_0,n_0} = \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{n_0} a_{k,l} \leq \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{k=1}^{m_0} b_k = B_{m_0} \leq B.$$

Другими словами, все частичные суммы D_k ограничены сверху числом B и поэтому при некотором D имеем $D_k \to D \le B$ при $k \to \infty$. Утверждение 2 доказано.

3) Пусть существует D. Тогда для любого $A_{m,n}$ можно найти номер k_0 такой, что сумма $D_{k_0} = \sum\limits_{k=1}^{k_0} d_k$ содержит все слагаемые $a_{k,l}$, входящие в сумму $A_{m,n}$. Но тогда при всех m, n имеем $A_{m,n} \le \le D_{k_0} \le D$. Следовательно, существует $A = \sup\limits_{m,n} A_{m,n}$ и $A \le D$, что и требовалось доказать. Теорема 4 доказана полностью.

Т е о р е м а 5. *Утверждение теоремы 4 останется в силе, если условие $a_{m,n} \ge 0$ опустить, а сходимость рядов рассматривать как абсолютную.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Числа $a_{m,n}$ представим в виде $a_{m,n} = p_{m,n} - q_{m,n}$, где

$$p_{m,n} = \frac{|a_{m,n}| + a_{m,n}}{2} \ge 0, \quad q_{m,n} = \frac{|a_{m,n}| - a_{m,n}}{2} \ge 0.$$

Далее достаточно применить теорему 4 к рядам с общими членами $p_{m,n}$ и $q_{m,n}$ и рассмотреть их разность. Теорема 5 доказана.

Т е о р е м а 6. *Любая перестановка членов двойного абсолютно сходящегося ряда не нарушает его сходимости и не изменяет его суммы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sum\sum b_{m,n}$ — перестановка двойного абсолютно сходящегося ряда $\sum\sum a_{m,n} = A$. Рассмотрим соответствующие рядам $\sum\sum a_{m,n}$ $\sum\sum b_{m,n}$ однократные ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d'_k$ из теоремы 4. Тогда ряд $\sum d_k = A$ абсолютно сходится, а ряд $\sum d'_k$ является некоторой его перестановкой. Но тогда он тоже абсолютно сходится, а вместе с ним абсолютно сходится и ряд $\sum\sum b_{m,n}$, причем

$$A = \sum\sum a_{m,n} = \sum d'_k = \sum d_k = \sum b_{m,n}.$$

Теорема 6 доказана.

Т е о р е м а 7. *В повторном абсолютно сходящемся ряде вида $\sum_m \left(\sum_n a_{m,n}\right)$ можно менять порядок суммирования. При этом ряд остается абсолютно сходящимся и его сумма не изменяется.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 5 двойной ряд $\sum\sum a_{m,n}$ также абсолютно сходится, а вместе с ним по той же теореме абсолютно сходится и ряд $\sum_n \left(\sum_m a_{m,n}\right)$, причем суммы всех трех рядов совпадают. Теорема 7 доказана.

В заключение подчеркнем, что вообще свойство сохранять сумму при изменении порядка суммирования будет в дальнейшем представлять особый интерес. Теорема 7 дает первый пример возможности изменения последовательности выполнения предельных переходов.

Глава XVI
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Лекция 8

§ 1. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

Понятия функциональной последовательности и функционального ряда связаны между собой так же тесно, как и в обычном числовом случае. С этими понятиями мы, по существу, ранее уже встречались. Примерами могут служить бесконечная геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad \text{при} \quad |q| < 1$$

или дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{при} \quad s > 1.$$

Если в первом случае зафиксировать q, а во втором s, то мы получим обычные числовые ряды. Но эти же параметры можно рассматривать как аргументы числовых функций, и тогда суммы рядов тоже будут представлять собой некоторые числовые функции. Подобные соображения приводят нас к следующим определениям.

Определение 1. Функциональной последовательностью *называется занумерованное множество функций $\{f_n(x)\}$, имеющих одну и ту же область определения $D \subset \mathbb{R}$. При этом множество D называется областью определения функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$.*

Здесь термин "занумеровать" означает "поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом $\mathbb{N}$".

Определение 2. *Пусть $\{a_n(x)\}$ — некоторая функциональная последовательность (ф. п.), определенная на множестве D. Формальная бесконечная сумма вида*

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x),$$

или просто $\sum a_n(x)$, называется **функциональным рядом**, *определенным на D.*

Фиксируя какое-либо значение $x = x_0 \in D$, получаем обычный числовой ряд $\sum a_n(x_0)$. Как и в числовом случае, определим понятие частичной суммы функционального ряда.

Определение 3. *При всех $n \in \mathbb{N}$ функция $A_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ называется (n-й)* **частичной суммой** *функционального ряда $\sum a_n(x)$ и $a_n(x)$ — его* **общим членом.**

В дальнейшем пусть D обозначает область определения функционального ряда $\sum a_n(x)$, т.е. последовательности $\{A_n(x)\}$.

Определение 4. *Если при фиксированном $x = x_0 \in D$ сходится числовой ряд $\sum a_n(x_0)$, то говорят, что функциональный ряд $\sum a_n(x)$* **сходится в точке** $x = x_0$.

Определение 5. *Множество $D_0 \subset D$, состоящее из тех точек x_0, в которых ряд $\sum a_n(x)$ (или последовательность $A_n(x)$) сходится, называется* **областью сходимости** *этого ряда (или этой последовательности).*

Замечание. Область сходимости функционального ряда обычно бывает у́же, чем область ее определения. Пример — бесконечная геометрическая прогрессия $\frac{q}{1-q} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$.

Определение 6. *Пусть D_0 — область сходимости функциональной последовательности $\{A_n(x)\}$ и пусть $A(x)$ есть предельное значение этой последовательности при фиксированном значении $x \in D_0$. Тогда множество пар $(x, A(x))$ при всех $x \in D_0$ задает некоторую функцию $y = A(x)$, определенную на всем множестве D_0. Эта функция называется* **предельной функцией** *функциональной последовательности $\{A_n(x)\}$. Если при этом $A_n(x)$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n(x)$, то функция $A(x)$ называется* **суммой** *этого ряда. Итак, сумма функционального ряда — это некоторая функция, определенная на его области сходимости. При $x \in D_0$* **остаток ряда** *$r_n(x)$тоже представляет собой некоторую функцию от x, $r_n(x) = A(x) - A_n(x)$, причем $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и при любом $x \in D_0$.*

Многие свойства суммы $A(x)$ такие, например, как непрерывность суммы ряда $\sum a_n(x)$, связаны с поведением его остатка $r_n(x)$ при $n \to \infty$. Для описания этого поведения далее будет введено важное понятие равномерной сходимости функциональных рядов и функциональных последовательностей на множестве. Для того чтобы подчеркнуть отличие от него введенного выше понятия простой сходимости, последнюю называют еще **поточечной сходимостью.**

Важные примеры функциональных рядов возникают из разложения различных функций по формуле Тейлора. Например, разлагая в точке $x_0 = 0$ функцию $y = \sin x$ при $x \in \mathbb{R}$, имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ — остаточный член формулы. Записывая его в форме Лагранжа, получим

$$r_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin^{(2n)} z$$

при некоторой точке z с условием, что она лежит между точками 0 и x. Отсюда

$$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Но при $n > x^2$ имеют место следующие неравенства:

$$(2n)! > n^{n+1}, \quad \frac{x^{2n}}{(2n)!} < \frac{x^2}{n^2} < \frac{1}{n},$$

т.е. $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, полагая

$$a_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

при всех $x \in \mathbb{R}$ имеем разложение $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

Определение 7. *Степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *называется* **рядом Тейлора** *функции* $f(x)$ *в точке* $x = a$, *а также* **разложением функции** $f(x)$ **в ряд Тейлора в этой точке.**

Примеры рядов Тейлора для некоторых функций:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(\forall x \in R)$;

2) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $(-1 < x \le 1)$;

3) $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(\forall x \in R)$;

4) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(\forall x \in R)$;

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ $(-1 < x \le 1)$;

6) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $(|x| \le 1)$;

7) $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| < 1)$.

§ 2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Определение 1. *Пусть последовательность функций $\{r_n(x)\}$ сходится к нулю при всех $x \in M$. Тогда говорят, что $r_n(x)$* **сходится к нулю равномерно на множестве** M, *если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n > n_0$ и одновременно при всех $x \in M$ выполнено неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$.*

В этом случае используют обозначение: $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Замечание. Слово "одновременно" в этом определении, вообще говоря, является избыточным и его можно опустить, однако оно обращает внимание на главное отличие равномерной сходимости от поточечной, состоящее в том, что в первом случае число $n_0(\varepsilon)$ в определении предела одно и то же для всех точек $x \in M$, а во втором случае оно может зависеть еще и от x, т.е. $n_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon, x)$.

Определение 2. *Если функция $A(x) = A_n(x) + r_n(x)$, где $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $A_n(x)$ называют* **равномерно сходящейся к функции** $A(x)$ **на множестве** M *при $n \to \infty$ и это обозначают так:*

$$A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Символ M здесь можно опустить, если по смыслу понятно, о каком множестве идет речь. Далее, если при этом $A_n(x)$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n(x)$, то этот ряд называют **равномерно сходящимся к** $A(x)$ **на множестве** M.

Важность введенного понятия равномерной сходимости видна на примере следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть каждая из функций $a_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится к функции $A(x)$ на интервале $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Тогда сумма $A(x)$ является непрерывной функцией в точке $x = x_0$.*

Доказательство. По определению равномерной сходимости имеем

$$A(x) = A_n(x) + r_n(x), \quad r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0 \quad (n \to \infty),$$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x), \quad r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x).$$

Используя обозначение $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, где $f(x)$ — любая функция, получим

$$\Delta A(x) = \Delta A_n(x) + \Delta r_n(x) = \Delta A_n(x) + r_n(x) - r_n(x_0).$$

Отсюда

$$|\Delta A(x)| \le |\Delta A_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|.$$

Поскольку $r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ $(n \to \infty)$, при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon_1)$ такой, что для всех $n > n_0$ и для всех $x \in I$ имеем

$$|r_n(x)| < \varepsilon_1, \quad |r_n(x_0)| < \varepsilon_1.$$

Заметим теперь, что функция $A_n(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, поэтому для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что при всех x с условием $|x - x_0| < \delta_1$ выполнено неравенство

$$|\Delta A_n(x)| = |A_n(x) - A_n(x_0)| < \varepsilon_1.$$

Теперь при заданном $\varepsilon > 0$ можно взять $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$, и тогда при всех x с условием $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1)$ и при $n = n_0(\varepsilon_1) + 1 = n_0(\varepsilon)$ получим

$$|\Delta A(x)| \le |\Delta A_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Но это и означает, что функция $A(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$. Теорема 1 доказана.

Далее рассмотрим некоторые простые свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Определение 3. *Последовательность функций $\{A_n(x)\}$ называется* **равномерно ограниченной на множестве** *M, если существует такое число C, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и при всех $x \in M$ имеем*

$$|A_n(x)| < C.$$

Утверждение 1. *Равномерно сходящаяся на множестве M последовательность $A_n(x)$, состоящая из ограниченных на M функций, является равномерно ограниченной на M.*

Доказательство. Пусть $B_m = \sup\limits_{x \in M} |A_m(x)|$ для каждого натурального числа m. В определении равномерной сходимости возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда при всех достаточно больших $n > n_0$ и при всех $x \in M$

$$|A(x) - A_n(x)| < 1, \quad |A(x)| \le |A_n(x)| + 1 \le B_m + 1.$$

Это значит, что $A(x)$ ограничена.

Далее, пусть $B_0 = \sup\limits_{x \in M} |A(x)|$, $B = \max\limits_{0 \le k \le n_0} B_k$. Положим $C = B + 1$. Тогда при $k \le n_0$ справедлива оценка

$$|A_k(x)| \le B < B + 1 = C,$$

а при $k > n_0$ имеем

$$|A_k(x)| \le |A(x) - (A(x) - A_k(x))| \le |A(x)| + |A(x) - A_k(x)| \le$$
$$\le B_0 + 1 \le B + 1 = C.$$

Таким образом, утверждение 1 доказано полностью. Попутно доказано еще одно утверждение.

Утверждение 2. *Если функция $A(x)$ является ограниченной на множестве M и $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$, то при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ функциональная последовательность $B_n(x) = A_{n_0+n}(x)$ равномерно ограничена на M.*

Следующие два утверждения приведем без доказательства, поскольку они доказываются точно так же, как и в аналогичных случаях для числовых рядов.

Утверждение 3. *Пусть при $n \to \infty$ имеем*

$$a_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x), \quad b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} b(x).$$

Тогда:

$1^0.\, a_n(x) + b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x) + b(x)$;

2^0. *если* $|b(x)| < C$ *при некотором* $C > 0$ *и всех* $x \in M$, *то*

$$a_n(x) \cdot b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x) \cdot b(x);$$

$3^0.\, \frac{a_n(x)}{b_n(x)} \underset{M}{\rightrightarrows} \frac{a(x)}{b(x)}$, *если только* $1/|b(x)| > C > 0$ *при всех* $x \in M$.

Утверждение 4. *Если последовательность $d_n(x)$ является равномерно ограниченной и $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, то $d_n(x) r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.*

§ 3. КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Докажем теперь критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы функциональная последовательность $A_n(x)$ равномерно сходилась на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $m > n_0$ и $n > n_0$ и всех $x \in M$ имело бы место неравенство $|A_n(x) - A_m(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. В этом случае $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n_0$ и для всех $x \in M$ имеем $|A_n(x) - A(x)| < \varepsilon/2$. Но тогда при $m > n_0$ и $n > n_0$ имеем

$$|A_m(x) - A_n(x)| \leq |A_m(x) - A(x)| + |A(x) - A_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. При каждом фиксированном $x \in M$ функциональная последовательность $A_n(x)$ превращается в числовую и для нее выполняется критерий Коши. Это значит, что она имеет предел $A(x)$, т.е. предельная функция существует на всем множестве M. Далее, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, по условию найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon/2)$ такой, что при всех m и $n > n_1$ имеем $|A_n(x) - A_m(x)| < \varepsilon/2$.

Снова произвольно зафиксируем $x \in M$ и устремим m к бесконечности. Получим неравенство

$$|A_n(x) - A(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Но тогда, полагая $n_0 = n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon/2)$, при всех $n > n_0$ и всех $x \in M$ будем иметь

$$|A_n(x) - A(x)| < \varepsilon,$$

т.е. $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$. Теорема 1 доказана.

Если $A_n(x)$ — последовательность частичных сумм функционального ряда $\sum a_n(x)$, то теорема 1 дает нам критерий Коши равномерной сходимости этого ряда. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. *Для равномерной сходимости ряда* $\sum a_n(x)$ *на множестве* M *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *такое, что для каждого* $n > n_0$, *и для каждого* $p \in \mathbb{N}$ *и для всех* $x \in M$ *выполнялось бы неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon.$$

И наконец, исходя из теоремы 2 сформулируем в прямой форме критерий отсутствия равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$.

Т е о р е м а 3. *Утверждение о том, что ряд* $\sum a_n(x)$ *или последовательность* $A_n(x)$ *не являются равномерно сходящимися на множестве* M, *означает, что существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что найдутся две последовательности* $\{n_m\}$ *и* $\{p_m\} \in \mathbb{N}$, *причем* $n_{m+1} > n_m$, *а также последовательность* $\{x_m\} \in M$, *для которых имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{k=n_m+1}^{n_m+p_m} a_k(x_m)\right| \geq \varepsilon.$$

Примеры неравномерно сходящихся рядов и последовательностей.

1. Ряд $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ сходится неравномерно на $[0,2)$.

Действительно, сумма ряда $A(x)$ при $x \neq 0$ равна

$$A(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = x\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{x}{x} = 1$$

и $A(0) = 0$. Это значит, что $x = 0$ — точка разрыва функции $A(x)$. Но если бы сходимость была равномерной, то функция $A(x)$ была бы непрерывной в силу теоремы 1 § 2, поскольку $a_n(x) = x(1-x)^n$ непрерывна в нуле. Но это не так. Следовательно, равномерной сходимости нет.

2. Если $A_n(x) = x^n$, то на множестве $M = (0,1)$ равномерная сходимость не имеет места.

Действительно, в теореме 3 положим $\varepsilon = 0,1$ и при каждом $m > 1$ возьмем $n_m = m$, $x_m = 1 - 1/m$, $p_m = m$. Тогда будем иметь

$$|A_m(x_m) - A_{2m}(x_m)| = \left|\left(1-\frac{1}{m}\right)^m - \left(1-\frac{1}{m}\right)^{2m}\right| =$$

$$= \left(1-\frac{1}{m}\right)^m\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right) > \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} > 0,1 = \varepsilon.$$

Таким образом, по критерию Коши в форме теоремы 3 последовательность $A_n(x)$ не является равномерно сходящейся.

Задача. *Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на $[0,1]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n(x) \to f_0(x)$ при $n \to \infty$. Доказать, что $f_0(x)$ имеет точку непрерывности на $(0,1)$.*

§ 4. ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Докажем три признака равномерной сходимости функционального ряда, принадлежащие Вейерштрассу, Абелю и Дирихле. Эти признаки дают достаточные условия для равномерной сходимости, но они не являются необходимыми, т.е. ряд $\sum a_n(x)$ может сходиться равномерно, но не удовлетворять любому из них. Впрочем, та же ситуация имела место и для сходимости обычных числовых рядов. С другой стороны, отметим, что они соответствуют признакам сходимости числовых рядов того же названия и развивают заложенные в них принципы.

Рассмотрим сначала следующий критерий равномерной сходимости для бесконечно малой функциональной последовательности.

Теорема 1. *Для того чтобы $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовала числовая последовательность β_n с условием $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $|b_n(x)| \le \beta_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in M$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть такая последовательность β_n существует. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $n > n_0$ справедлива оценка

$$\beta_n < \varepsilon.$$

Но тогда при тех же n и всех $x \in M$ имеем $|b_n(x)| \le \beta_n < \varepsilon$, т.е.

$$b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Необходимость. Пусть $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$. Положим $\beta_n = \sup\limits_{x \in M} |b_n(x)|$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $n > n_0$ справедливо неравенство $|b_n(x)| < \varepsilon$, при тех же n имеем $\beta_n = \sup\limits_{x \in M} |b_n(x)| \le \varepsilon$. Это значит, что $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание. Последовательность β_n в доказанной теореме называется **мажорантой** для $b_n(x)$, и утверждение этой теоремы означает, что равномерная сходимость бесконечно малой функциональной последовательности равносильна существованию бесконечно малой ее мажоранты.

Теперь рассмотрим признак Вейерштрасса для равномерной сходимости функционального ряда.

Определение 1. *Сходящийся числовой ряд $\sum p_n$ с условием $p_n \geq 0$ при всех n называется* **мажорантой** *функционального ряда $\sum a_n(x)$ на множестве M, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in M$ справедлива оценка $|a_n(x)| \leq p_n$. Говорят также, что ряд $\sum a_n(x)$* **мажорируется** *рядом $\sum p_n$ на множестве M.*

Т е о р е м а 2 (признак Вейерштрасса). *Пусть функциональный ряд*
$\sum a_n(x)$ на множестве M имеет мажоранту $\sum p_n$. Тогда он равномерно сходится на этом множестве.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить, что остаток ряда $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю на M. Но заметим, что при любом фиксированном $x \in M$ числовой ряд $\sum a_n(x)$ сходится, поскольку имеет мажоранту $\sum p_n = P$. Кроме того, при каждом фиксированном x имеем

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = \rho_n,$$

где ρ_n — остаток числового ряда $\sum p_n$ и $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но по теореме 1 это означает, что $r_n(x)$ имеет бесконечно малую мажоранту ρ_n. Следовательно, $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$, т.е. ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3.

(А) (признак Абеля). *Пусть:*

1) $\sum a_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$;

2) последовательность $b_n(x)$ равномерно ограничена на M;

3) при всех фиксированных $x \in M$ числовая последовательность $b_n(x)$ монотонна.

Тогда ряд $\sum h_n(x)$, $h_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, равномерно сходится на M.

(Д) (признак Дирихле). *Пусть:*

1) частичные суммы $A_n(x)$ равномерно ограничены на M;

2) $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$;

3) при всех фиксированных $x \in M$ числовая последовательность $b_n(x)$ монотонна.

Тогда ряд $\sum h_n(x)$, $h_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, равномерно сходится на M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим ту же схему, что и при доказательстве одноименных признаков для числовых рядов. Как и раньше, сначала будем считать, что последовательность $b_n(x)$ убывает и $b_n(x) \geq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Применяя преобразование Абеля к частичным суммам ряда $\sum h_n(x)$ и используя обозначения

$$H_k'(x) = \sum_{m=n+1}^{k} h_m(x),\ A_k'(x) = \sum_{m=n+1}^{k} a_m(x)$$

для отрезков рядов $\sum h_n(x)$ и $\sum a_n(x)$, получим

$$|H_p'(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| =$$

$$= \left|A_{n+p}'(x)b_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k'(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\right| \leq$$

$$\leq |A_{n+p}'(x)|b_{n+p}(x) + \sup_{n<k<n+p} |A_k'| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) =$$

$$= b_{n+1}(x) \sup_{n<k\leq n+p} |A_k'(x)|.$$

Рассмотрим случай (А). В силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ и согласно критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $k > n_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{x\in M} |A_k'(x)| < \varepsilon.$$

Кроме того, в силу равномерной ограниченности $b_n(x)$ при некотором $C > 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in M$ имеем $b_n(x) \leq C$. Следовательно, при $n \geq n_0$ справедлива оценка $|H_p'(x)| \leq C\varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает выполнение условия критерия Коши для равномерной сходимости ряда $\sum h_n(x)$, т.е. в случае (А) теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай (Д). При этом в силу равномерной ограниченности сумм $A_k(x)$, а вместе с ними и $A_k'(x) = A_k(x) - A_n(x)$ найдется число $C > 0$ такое, что $|A_k'(x)| < C$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in M$. По критерию Коши при достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$ в силу п. 2 имеем $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$. Тогда получим $|b_{n+1}(x)| < \varepsilon$, откуда, как и раньше, получим $|H_p'(x)| \leq C\varepsilon$. Тем самым утверждение (Д) тоже доказано.

Осталось освободиться от ограничений: 1) последовательность $b_n(x)$ убывает; 2) $b_n(x) \geq 0$ при всех n. Для того чтобы снять ограничение 1), можно поменять знаки на противоположные у всех функций $a_n(x)$ и $b_n(x)$ одновременно. Тогда условие возрастания $b_n(x)$ переходит в условие убывания $b_n(x)$, а все условия на ряд $\sum a_n(x)$ сохраняются. Чтобы освободиться от ограничения 2), рассмотрим функцию $b_0(x)$, где

$$b_0(x) = \inf_n b_n(x) = \lim_{n\to\infty} b_n(x).$$

Тогда $b_n(x) = b_0(x) + \beta_n(x)$, где $\beta_n(x) \geq 0 \ \forall x \in M$ и $\beta_n(x)$ убывает. Отсюда

$$\sum a_n(x)b_n(x) = b_0(x)\sum a_n(x) + \sum a_n(x)\beta_n(x).$$

В случае (Д) первое слагаемое равно нулю, а в случае (А) оно представляет собой равномерно сходящийся ряд. Второй же ряд удовлетворяет условиям теоремы и обоим сделанным выше допущениям. Тем самым теорема 3 доказана полностью.

Докажем следующий изящный критерий равномерной сходимости синус-ряда (см. [36],[37]).

Теорема 4 (Критерий Чоунди – Джолиффе равномерной сходимости тригонометрического синус-ряда). *Пусть b_n — положительная, монотонно убывающая последовательность. Тогда для равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ на $\mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$.*

Доказательство. Необходимость. По критерию Коши имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $m > n_0$, всех $n > n_0$ и всех $x \in [0,\pi]$ справедливо неравенство $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k \sin kx\right| < \varepsilon$. Возьмем $m = [n/2]$ и $x = \pi/(4n)$. Тогда при $m+1 \leq k \leq n$ получим $\sin kx \geq \sin\pi/4 = \sqrt{2}/2$. Следовательно,

$$\sum_{k=m+1}^{n} b_k \sin kx \geq (n-m)b_n\sqrt{2}/2 \geq nb_n\sqrt{2}/4.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|nb_n| < 4\varepsilon/\sqrt{2}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Так как для любого натурального числа n функции $\sin nx$ — периодические с периодом 2π и нечетные, то достаточно доказать равномерную сходимость рассматриваемого ряда только на отрезке $[0,\pi]$. Из условия теоремы имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ справедливо неравенство $|nb_n| < \varepsilon$ Возьмем любое $n > n_0$ и любое $p \geq 1$ и оценим сумму

$$\Sigma = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \sin kx\right| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \left|\sum_{k=n+1}^{[\pi/x]} b_k \sin kx\right|, \quad \Sigma_2 = \left|\sum_{k=[\pi/x]}^{n+p} b_k \sin kx\right|.$$

При $k \le \pi/x$ имеем $\sin t \le t$, поэтому

$$\Sigma_1 \le \sum_{k=m+1}^{[\pi/x]} \frac{\varepsilon}{k} kx \le \varepsilon\pi.$$

Для оценки суммы Σ_2 применим преобразование Абеля. Получим

$$\Sigma_2 \le b_{[\pi/x]+1} \max_{1\le q\le p} \left| \sum_{k=[\pi/x]}^{n+q} \sin kx \right| < \frac{\varepsilon}{[\pi/x]+1} \cdot \frac{\pi}{x} \le \varepsilon,$$

поскольку функция $\sin t/t$ монотонно убывает при $0 < t \le \pi/2$ и

$$\left| \sum_{k=[\pi/x]}^{n+q} \sin kx \right| = \left| \frac{\cos(n+q-1/2)x - \cos([\pi/x]+1/2)x}{2\sin x/2} \right| \le \frac{1}{\sin x/2} \le \frac{\pi}{x}.$$

Следовательно, $\Sigma < \varepsilon(\pi+1)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n_0$, для всех $p \ge 1$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\Sigma < \varepsilon(\pi + 1)$, что в силу критерия Коши равномерной сходимости ряда означает равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Теорема 4 доказана полностью.

Отметим, что интересные обобщения этой теоремы даны Г. Х. Харди [37].